



# Méthodes primales-duales régularisées pour l'optimisation non linéaire avec contraintes

Riadh Omheni

## ► To cite this version:

Riadh Omheni. Méthodes primales-duales régularisées pour l'optimisation non linéaire avec contraintes. Optimisation et contrôle [math.OC]. Université de Limoges, 2014. Français. NNT : 2014LIMO0045 . tel-01136063

**HAL Id: tel-01136063**

**<https://theses.hal.science/tel-01136063>**

Submitted on 26 Mar 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# UNIVERSITÉ DE LIMOGES

ÉCOLE DOCTORALE SIIM N° 521  
FACULTÉ des SCIENCES et TECHNIQUES  
Laboratoire XLIM – UMR CNRS N° 7252  
Département Mathématiques Informatique

## THÈSE

pour obtenir le grade de

## DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE LIMOGES

dans la spécialité

**Mathématiques appliquées et applications des mathématiques**

présentée et soutenue publiquement par

**Riadh OMHENI**

le 14 Novembre 2014

## Méthodes primales-duales régularisées pour l'optimisation non linéaire avec contraintes

devant le jury composé de

### Rapporteurs :

Serge GRATTON	Professeur, ENSEEIHT, Toulouse
Dominique ORBAN	Professeur, École Polytechnique de Montréal, Canada

### Examineurs :

Samir ADLY	Professeur, Université de Limoges
Joël BENOIST	Maître de Conférences-HDR, Université de Limoges
Sonia CAFIERI	Professeur, ENAC, Toulouse

### Directeur de thèse :

Paul ARMAND	Professeur, Université de Limoges
-------------	-----------------------------------



# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse, le professeur Paul Armand, qui m'a dirigé durant ces trois années avec beaucoup de compétence et de patience. Ses encouragements, conseils et remarques m'ont permis de progresser et de mener à bon terme mon travail de thèse. Un grand merci aussi au professeur Armand pour m'avoir donné l'opportunité de participer à plusieurs conférences, nationales et internationales, ce qui m'a permis d'élargir mon réseau professionnel en prenant contact avec de nombreux professeurs et jeunes chercheurs.

Ce fut un grand honneur pour moi que les professeurs Serge Gratton et Dominique Urban aient accepté d'être rapporteurs de ma thèse et d'évaluer ainsi mon travail. Je les remercie bien vivement pour leur disponibilité et leurs remarques si précieuses.

Je remercie profondément les professeurs Samir Adly, Joël Benoist et Sonia Cafieri d'avoir accepté de faire partie de mon jury de soutenance. Un merci tout particulier au professeur Cafieri pour avoir été mon président de jury et au professeur Adly pour ses conseils et encouragements depuis l'année du master.

Je tiens aussi à remercier le professeur Frédéric Messine qui a encadré mon stage de Master 2 à l'ENSEEIH-IRIT avec beaucoup de compétence et m'a initié à la recherche dans un domaine très passionnant qui est l'optimisation.

J'exprime également ma reconnaissance à tous les membres du Département Mathématiques Informatique du laboratoire XLIM et plus particulièrement aux membres de l'équipe MOD pour leur accueil toujours chaleureux et pour l'attention qu'ils ont su porter à mes travaux de recherche.

Je tiens encore à exprimer ma profonde gratitude à tous mes amis pour leur soutien.

Je serai toujours reconnaissant à toute ma famille, notamment à mes parents, à ma sœur et à mes frères, pour leurs encouragements, leurs prières et leur support dont j'ai eu la chance de profiter. Je les remercie du fond du coeur et leur dédie ce mémoire.

Enfin, merci à tous ceux qui ont participé, de près ou de loin, à la réalisation de cette thèse.

*Limoges, décembre 2014*

*Riadh Omheni*



*À ma mère et mon père*  
*À ma sœur et mes frères*  
*À toute ma famille*



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	État de l'art . . . . .	1
1.1.1	Méthode de pénalisation quadratique . . . . .	1
1.1.2	Méthode de lagrangien augmenté . . . . .	3
1.1.3	Méthodes de points intérieurs . . . . .	5
1.1.4	Méthode de programmation quadratique successive . . . . .	9
1.2	Objectifs et contenu de la thèse . . . . .	9
1.3	Notations, définitions et résultats utiles . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Une méthode de pénalisation quadratique primale-duale pour l'optimisation avec contraintes d'égalité</b>	<b>17</b>
<b>3</b>	<b>Une méthode de lagrangien augmenté primale-duale pour l'optimisation avec contraintes d'égalité</b>	<b>25</b>
3.1	Introduction et motivation . . . . .	25
3.2	Description de l'algorithme . . . . .	27
3.2.1	Itération externe . . . . .	27
3.2.2	Itération interne . . . . .	30
3.3	Analyse de convergence globale . . . . .	32
3.3.1	Itérations internes . . . . .	32
3.3.2	Itérations externes . . . . .	35
3.4	Convergence asymptotique . . . . .	39
3.5	Détails de l'implémentation . . . . .	43
3.6	Résultats numériques . . . . .	45
3.6.1	Comparaison avec SPDOPT-QP . . . . .	45
3.6.2	Comparaison avec d'autres méthodes de lagrangien augmenté . . . . .	48
3.7	Conclusion . . . . .	51
<b>4</b>	<b>Une méthode de lagrangien augmenté et de points intérieurs primale-duale pour l'optimisation non linéaire</b>	<b>53</b>
4.1	Introduction . . . . .	54
4.1.1	Schéma général de l'algorithme . . . . .	57
4.2	Description de l'algorithme . . . . .	60
4.2.1	Itération externe . . . . .	60
4.2.2	Itération interne . . . . .	61
4.3	Analyse de convergence globale . . . . .	63



4.3.1	Itérations internes . . . . .	63
4.3.2	Itérations externes . . . . .	68
4.4	Convergence asymptotique . . . . .	72
4.4.1	Hypothèses et résultats préliminaires . . . . .	72
4.4.2	Résultats asymptotiques . . . . .	75
4.5	Implémentation . . . . .	81
4.6	Résultats numériques . . . . .	86
4.6.1	Stratégies de réduction de $\mu$ . . . . .	87
4.6.2	Points de départ des itérations internes . . . . .	88
4.6.3	Exemple de Wächter et Biegler . . . . .	89
4.6.4	Collection de Hock et Schittkowski . . . . .	91
4.6.5	Collection de CUTEst . . . . .	92
4.6.6	Collection de problèmes dégénérés . . . . .	94
4.7	Conclusion . . . . .	96
<b>5</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>99</b>
<b>A</b>	<b>Liste des problèmes testés</b>	<b>103</b>
<b>B</b>	<b>Résultats numériques de SPDOPT</b>	<b>111</b>
<b>C</b>	<b>Résultats numériques de IPOPT</b>	<b>127</b>
<b>D</b>	<b>Résultats numériques de ALGENCAN</b>	<b>139</b>
<b>E</b>	<b>Résultats numériques de LANCELOT</b>	<b>151</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>163</b>

# Table des figures

1.1	Profil de performance comparant trois solveurs A, B, et C en terme de temps CPU. . . . .	16
2.1	Profils de performance de SPDOPT-1 et SPDOPT-2 sur une collection de 109 problèmes dégénérés. . . . .	21
3.1	Profils de performance de SPDOPT-AL et SPDOPT-QP sur les problèmes standards. . . . .	46
3.2	Profils de performance de SPDOPT-AL et SPDOPT-QP sur les problèmes dégénérés. . . . .	48
3.3	Profils de performance de SPDOPT-AL, SPDOPT-AL-LIN, ALGENCAN et LANCELOT-A sur les problèmes standards. . . . .	50
3.4	Profils de performance de SPDOPT-AL, SPDOPT-AL-LIN, ALGENCAN et LANCELOT-A sur les problèmes dégénérés. . . . .	50
4.1	Comparaison du nombre d'évaluations de fonctions de SPDOPT-AL avec 3 mises à jour du paramètre barrière. . . . .	87
4.2	Comparaison du nombre d'évaluations de fonctions de SPDOPT-AL avec deux choix du point de départ des itérations internes. . . . .	88
4.3	Comportement de SPDOPT-AL sur l'exemple de Wächter et Biegler avec $(a, b) = (1, 2)$ . . . . .	90
4.4	Comportement de SPDOPT-AL (sans mise à l'échelle) sur l'exemple de Wächter et Biegler avec $(a, b) = (1, 0)$ . . . . .	90
4.5	Options de SPDOPT-AL, IPOPT, ALGENCAN et LANCELOT-A. . . . .	91
4.6	Nombre d'évaluations de fonctions de SPDOPT-AL, IPOPT, ALGENCAN et LANCELOT-A sur 158 problèmes de Hock et Schittkowski. . . . .	92
4.7	Distribution des 509 problèmes selon le nombre de variables. . . . .	93
4.8	Nombre d'évaluations de fonctions de SPDOPT-AL, IPOPT, ALGENCAN et LANCELOT-B sur 468 problèmes de CUTEst. . . . .	93
4.9	Temps CPU de SPDOPT-AL, IPOPT, ALGENCAN et LANCELOT-B sur 438 problèmes de CUTEst. . . . .	94
4.10	Nombre d'évaluations de fonctions de SPDOPT-AL, IPOPT, ALGENCAN et LANCELOT-A sur 104 problèmes dégénérés. . . . .	95
4.11	Temps CPU de SPDOPT-AL, IPOPT, ALGENCAN et LANCELOT-A sur 44 problèmes dégénérés. . . . .	96
4.12	Nombre d'évaluations de fonctions de SPDOPT-AL, IPOPT, ALGENCAN et LANCELOT-A sur 77 problèmes de la collection MacMPEC. . . . .	97

4.13 Temps CPU de SPDOPT-AL, IPOPT, ALGENCAN et LANCELOT-A sur 46 problèmes de la collection MacMPEC. . . . .	97
--	----

# Liste des tableaux

4.1	Exemples de problèmes pour lesquels les performances du choix $w_k^0 = w_k$ sont meilleures que celles du choix $w_k^0 = \hat{w}_k$ . . . . .	89
A.1	Liste des problèmes des bibliothèques COPS et CUTer . . . . .	104
A.2	Liste des problèmes de la collection Hock et Schittkowski . . . . .	105
A.3	Liste des problèmes de la collection CUTEst . . . . .	106
A.4	Liste des problèmes de la collection MacMPEC . . . . .	109
B.1	Les messages d'erreur retournés par SPDOPT-AL et SPDOPT-QP . . . .	111
B.2	Résultats de SPDOPT-QP sur des problèmes d'égalité de CUTer et COPS (chapitre 2) . . . . .	112
B.3	Résultats de SPDOPT-AL sur des problèmes d'égalité de CUTer et COPS . . . . .	114
B.4	Résultats de SPDOPT-QP sur des problèmes d'égalité de CUTer et COPS (chapitre 3) . . . . .	116
B.5	Résultats de SPDOPT-AL sur des problèmes de la collection Hock et Schittkowski . . . . .	118
B.6	Résultats de SPDOPT-AL sur des problèmes de la collection CUTEst . . . .	120
B.7	Résultats de SPDOPT-AL sur des problèmes dégénérés des collections COPS et CUTer . . . . .	124
B.8	Résultats de SPDOPT-AL sur des problèmes de la collection MacMPEC . . . .	125
C.1	Les messages d'erreur retournés par IPOPT . . . . .	127
C.2	Résultats de IPOPT sur des problèmes d'égalité de CUTer et COPS . . . .	128
C.3	Résultats de IPOPT sur des problèmes de la collection Hock et Schittkowski . . . .	130
C.4	Résultats de IPOPT sur des problèmes de la collection CUTEst . . . . .	132
C.5	Résultats de IPOPT sur des problèmes dégénérés des collections COPS et CUTer . . . . .	136
C.6	Résultats de IPOPT sur des problèmes de la collection MacMPEC . . . . .	137
D.1	Les messages d'erreur retournés par ALGENCAN . . . . .	139
D.2	Résultats de ALGENCAN sur des problèmes d'égalité de CUTer et COPS . . . .	140
D.3	Résultats de ALGENCAN sur des problèmes de la collection Hock et Schittkowski . . . . .	142
D.4	Résultats de ALGENCAN sur des problèmes de la collection CUTEst . . . .	144
D.5	Résultats de ALGENCAN sur des problèmes dégénérés des collections COPS et CUTer . . . . .	148
D.6	Résultats de ALGENCAN sur des problèmes de la collection MacMPEC . . . .	149

E.1	Les messages d'erreur retournés par LANCELOT-A et LANCELOT-B .	151
E.2	Résultats de LANCELOT-A sur des problèmes d'égalité de CUTer et COPS	152
E.3	Résultats de LANCELOT-A sur des problèmes de la collection Hock et Schittkowski . . . . .	154
E.4	Résultats de LANCELOT-B sur des problèmes de la collection CUTest .	156
E.5	Résultats de LANCELOT-A sur des problèmes dégénérés de COPS et CUTer	160
E.6	Résultats de LANCELOT-A sur des problèmes de la collection MacMPEC	161

# Chapitre 1

## Introduction

### Sommaire

<b>1.1 État de l'art</b>	<b>1</b>
1.1.1 Méthode de pénalisation quadratique	1
1.1.2 Méthode de lagrangien augmenté	3
1.1.3 Méthodes de points intérieurs	5
1.1.4 Méthode de programmation quadratique successive	9
<b>1.2 Objectifs et contenu de la thèse</b>	<b>9</b>
<b>1.3 Notations, définitions et résultats utiles</b>	<b>11</b>

Un problème d'optimisation non linéaire peut s'écrire sous de nombreuses formes équivalentes parmi lesquelles nous citons la formulation suivante :

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x) \\ \text{s.c.} \quad & g(x) = 0, \\ & h(x) \geq 0, \end{aligned} \tag{1.0.1}$$

où  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  et  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  sont des fonctions suffisamment régulières. Développer de nouvelles méthodes fiables et efficaces pour la résolution des problèmes d'optimisation de la forme (1.0.1) a suscité beaucoup d'intérêt depuis les années 40. Ceci est principalement motivé par ses applications très variées dans de nombreuses disciplines telles que l'aéronautique, la commerce, l'ingénierie, la physique, etc. Des dizaines de livres et des centaines d'articles ont été publiés. Pendant les deux dernières décennies et avec le développement des puissances de calcul, plusieurs solveurs d'optimisation non linéaire ont vu le jour. Dans le paragraphe suivant, nous résumons l'état de l'art des méthodes concernées par notre étude ainsi que leur implémentations.

## 1.1 État de l'art

### 1.1.1 Méthode de pénalisation quadratique

Les méthodes de pénalisation sont parmi les premières méthodes proposées pour la

résolution des problèmes d'optimisation avec contraintes d'égalité

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x) \\ \text{s.c.} \quad & g(x) = 0. \end{aligned} \tag{P_E}$$

Cette approche consiste à remplacer le problème original par une suite de problèmes sans contrainte dont la fonction objectif est une combinaison de  $f$  et d'une fonction mesurant la violation des contraintes. Un exemple populaire est la méthode de pénalisation quadratique qui consiste à résoudre une suite de problèmes de la forme

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad \varphi_\sigma(x) := f(x) + \frac{1}{2\sigma} \|g(x)\|^2, \tag{1.1.1}$$

où  $\sigma > 0$  est le paramètre de pénalisation. Cette méthode a été proposée pour la première fois en 1943 par Courant [42]. Sous des conditions standards, Fiacco et McCormick [57] ont montré que la suite des minima du problème (1.1.1) converge vers une solution du problème initial lorsque  $\sigma \rightarrow 0$ . Afin d'obtenir une convergence rapide dans la résolution du problème (1.1.1), la méthode de Newton doit être utilisée. La direction de Newton à un point  $x$  est la solution du système linéaire

$$\nabla^2 \varphi_\sigma(x) d^x = -\nabla \varphi_\sigma(x), \tag{1.1.2}$$

où la matrice  $\nabla^2 \varphi_\sigma(x)$  est donnée par

$$\nabla^2 \varphi_\sigma(x) = \nabla^2 f(x) + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^m g_i(x) \nabla^2 g_i(x) + \frac{1}{\sigma} \nabla g(x) \nabla g(x)^\top.$$

Lootsma [92] et Murray [95] ont montré que cette matrice devient de plus en plus mal-conditionnée lorsque  $\sigma$  devient petit ce qui entraîne des difficultés numériques en résolvant le système linéaire (1.1.2). Notons que c'est le troisième terme dans la définition de  $\nabla^2 \varphi_\sigma(x)$  qui est l'origine du mauvais conditionnement. Pour faire face à cet inconvénient, des solutions ont été proposées par Broyden et Attia [29], Coleman et Hempel [37] et Gould [74]. Au lieu de résoudre le système de Newton (1.1.2), ils proposent de le reformuler en introduisant une variable auxiliaire

$$y = \frac{1}{\sigma} \nabla g(x)^\top d^x.$$

Ceci donne un nouveau système augmenté de la forme

$$\begin{pmatrix} \nabla^2 f(x) + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^m g_i(x) \nabla^2 g_i(x) & \nabla g(x) \\ \nabla g(x)^\top & -\sigma I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nabla \varphi_\sigma(x) \\ 0 \end{pmatrix},$$

dont le conditionnement reste borné lorsque  $x$  est proche de la solution et la valeur de  $\sigma$  est suffisamment petite.

### 1.1.2 Méthode de lagrangien augmenté

La méthode de lagrangien augmenté, encore connue sous le nom de la méthode des multiplicateurs, a été proposée en 1969 indépendamment par Hestenes [82] et Powell [103] pour faire face aux difficultés dues au mauvais conditionnement associé à la méthode de pénalisation quadratique. Le lagrangien augmenté associé au problème ( $P_E$ ) est défini par

$$\psi_{\lambda,\sigma}(x) := f(x) + \lambda^\top g(x) + \frac{1}{2\sigma} \|g(x)\|^2, \quad (1.1.3)$$

où  $\sigma > 0$  est le paramètre de pénalisation et  $\lambda$  est une estimation du multiplicateur de Lagrange. La méthode de lagrangien augmenté consiste à résoudre, exactement ou approximativement, une suite de problèmes de minimisation sans contrainte de la forme

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \psi_{\lambda,\sigma}(x). \quad (1.1.4)$$

Après chaque minimisation, le paramètre de pénalisation et le multiplicateur de Lagrange sont mis à jour en fonction de la réalisabilité des contraintes. Si la violation des contraintes est inférieure à une valeur cible, alors  $\sigma$  est maintenu fixe et une nouvelle valeur du multiplicateur de Lagrange  $\lambda_+$  est calculée par la formule suivante

$$\lambda_+ = \lambda + \frac{g(x)}{\sigma},$$

où  $x$  est la solution de (1.1.4). Sinon,  $\sigma$  est diminué suffisamment et  $\lambda_+$  est maintenu constant afin d'éviter une mauvaise estimation du multiplicateur de Lagrange. Une autre méthode de mise à jour du multiplicateur de Lagrange consiste à le traiter comme une fonction en  $x$  plutôt que comme une variable séparée. Une estimation du multiplicateur de Lagrange  $\lambda(x)$  est définie comme une solution du problème de minimisation suivant

$$\lambda(x) \in \arg \min_{\lambda \in \mathbb{R}^m} \frac{1}{2} \|\nabla f(x) + \nabla g(x)\lambda\|^2. \quad (1.1.5)$$

Les propriétés théoriques et pratiques de cette approche ont été analysées par Bertsekas [21], Boggs et Tolle [25], Di Pillo et Grippo [49], Fletcher [58] et Glad et Polak [72]. Les principaux inconvénients de cette approche sont le coût de résolution de (1.1.5) et le fait que  $\lambda(x)$  n'est pas unique lorsque  $\nabla g(x)$  n'est pas de plein rang.

L'avantage de la méthode de lagrangien augmenté par rapport à celle de pénalisation quadratique est que le processus de minimisation sans contrainte (1.1.4) converge sans la nécessité de conduire le paramètre de pénalisation vers zéro. En effet, si  $x^*$  est un minimum local du problème initial ( $P_E$ ) et  $\lambda^*$  est le multiplicateur de Lagrange associé, alors  $x^*$  est un minimum local strict de  $x \mapsto \psi_{\lambda^*,\sigma}(\cdot)$  pour tout  $\sigma$  suffisamment petit (voir par exemple [99, Théorème 17.5]). Par conséquent, le mauvais conditionnement associé aux méthodes de pénalisation quadratique est évité.

La méthode de lagrangien augmenté a été proposée à la fin des années 60 essentiellement pour résoudre les problèmes d'optimisation avec contraintes d'égalité. Au début des années 70, Rockafellar [105, 106] et Buys [30] ont étendu le lagrangien augmenté de Powell-Hestenes au cas des problèmes d'optimisation avec contraintes d'inégalité. Rockafellar a établi la convergence globale dans le cas convexe tandis que Buys a démontré



la convergence locale dans le cas non convexe. En 1982, Di Pillo et Grippo [50] ont étendu leur travail [49] concernant les problèmes avec contraintes d'égalité pour résoudre ceux avec contraintes d'inégalité. Des résultats supplémentaires peuvent être trouvés dans [19, 20, 56].

Les propriétés de convergence locale des méthodes de lagrangien augmenté ont été discutées dans [21, 22, 24, 30, 73, 101]. Sous l'hypothèse que la valeur initiale du multiplicateur de Lagrange soit suffisamment proche du multiplicateur optimal, Buys [30] a montré la convergence linéaire de la méthode de lagrangien augmenté sans donner une estimation de ce taux de convergence linéaire. Bertsekas [22] a montré que ce dernier est inversement proportionnel au paramètre de pénalisation avec l'hypothèse que la suite des multiplicateurs de Lagrange générés par l'algorithme est bornée. Il a encore démontré que le taux de convergence devient superlinéaire lorsque le paramètre de pénalisation tend vers zéro. Il convient de noter que les résultats précédents sont basés sur l'hypothèse que le problème (1.1.4) est résolu exactement. Dans le cas où il est résolu approximativement, Bertsekas [18] a donné un exemple d'un critère d'arrêt pour lequel le taux de convergence linéaire ne peut pas être obtenu et afin de garantir la convergence globale, il est nécessaire que le paramètre de pénalisation converge vers zéro. Récemment, Polyak [102] a démontré la convergence quadratique locale d'une méthode de lagrangien augmenté primale-duale sous l'hypothèse des conditions d'optimalité de second ordre standards. Notons que cette analyse a été réalisée sans aucune stratégie de globalisation.

La convergence globale des méthodes de lagrangien augmenté a largement été étudiée. En raison de ses propriétés intéressantes, les problèmes d'optimisation convexe ont été traités séparément par Kort et Bertsekas [87, 88], Rockafellar [108] et Tseng et Bertsekas [115]. La convergence globale des problèmes non convexes a été analysée dans [21, 39, 100, 105, 107]. Qu'il s'agisse d'une optimisation convexe ou non convexe, l'analyse de la convergence des méthodes de lagrangien augmenté nécessite la bornitude de la suite des multiplicateurs de Lagrange. En 2009, Wang et Yi [123] ont proposé deux méthodes de lagrangien augmenté globalement convergentes qui n'exigent ni la bornitude de la suite des multiplicateurs de Lagrange ni la qualification des contraintes. Dans le cas où la suite des variables primales est divergente, ils donnent une condition nécessaire et suffisante qui garantit que la suite des valeurs de la fonction objectif converge vers la valeur optimale du problème initial.

Le lagrangien augmenté a été utilisé comme une fonction de mérite pour globaliser la méthode de programmation quadratique successive pour la première fois par M. H. Wright [125]. Elle a démontré la convergence globale de son approche et l'acceptation du pas unité par la fonction de mérite dans un voisinage de la solution ce qui permet de prouver la convergence superlinéaire locale de son algorithme. Cette fonction de mérite a également été considérée par Byrd, Tapia et Zhang [35], Cuthrell et Biegler [45], Gill *et al.* [69], Schittkowski [109, 110], Tapia [112]. Toutes ces méthodes sont des approches primales, dans le sens où la globalisation a été faite seulement dans l'espace des variables primales. Récemment, Gill et Robinson [70, 71] ont proposé une nouvelle méthode de programmation quadratique successive régularisée basée sur la minimisation d'une fonction de lagrangien augmenté primale-duale sous des contraintes de borne. Par le biais de quelques résultats numériques, ils ont montré l'efficacité de la méthode proposée.

Malgré ses propriétés intéressantes, la méthode de lagrangien augmenté présente des inconvénients importants. En particulier, elle souffre beaucoup du mauvais choix des

valeurs initiales du paramètre de pénalisation et du multiplicateur de Lagrange. D'après Curtis, Jian et Robinson [43], si le paramètre de pénalisation est trop petit et/ou les multiplicateurs de Lagrange sont de mauvaises estimations des multiplicateurs optimaux, alors on trouve généralement des itérations au cours de lesquelles aucun progrès n'ai fait dans l'espace primal. Pour faire face à cette difficulté, ils ont proposé une mise à jour adaptative pour le paramètre de pénalisation et ont montré, par le biais de quelques tests numériques, que leur méthode est moins sensible que la méthode de lagrangien augmenté classique aux choix initiaux de  $\sigma$  et  $\lambda$ .

Le lagrangien augmenté a été utilisé avec succès dans un certain nombre de différents cadres algorithmiques pour la résolution du problème ( $P_{EI}$ ). Il a été utilisé dans quatre logiciels bien établis qui sont ALGENCAN [4, 5], LANCELOT [40], PENNON [85] et MINOS [96]. ALGENCAN est une implémentation d'une méthode de type lagrangien augmenté qui utilise une stratégie de recherche linéaire pour la globalisation. À chaque itération, il résout un sous-problème avec des contraintes de borne dont la fonction objectif est le lagrangien augmenté de Powell-Hestenes-Rockafellar. LANCELOT applique une méthode de lagrangien augmenté à une suite de sous-problème avec des contraintes de borne. Pour la globalisation, une méthode de région de confiance est utilisée. Dans PENNON, le problème d'origine est transformé en un problème sans contrainte dans lequel les contraintes d'inégalités apparaissent dans la fonction barrière et les contraintes d'égalité dans la fonction de lagrangien augmenté. Pour la résolution de ce problème, une combinaison de deux approches est utilisée : au début des itérations (les 10 ou 15 premières itérations), une méthode de Newton globalisée avec une stratégie de recherche linéaire est appliquée. Si quelques difficultés numériques ont été rencontrées, une méthode de région de confiance sera utilisée. Il convient de noter que PENNON peut résoudre les problèmes d'optimisation non linéaire semi-définie de la forme

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x) \\ & c(x) \leq 0, \\ & X(x) \preceq 0, \end{aligned}$$

où  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  et  $c : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  sont des fonctions convexes de classe  $C^2$ ,  $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{S}^p$  est un opérateur matriciel convexe,  $\mathcal{S}^p$  désigne l'ensemble des matrices réelles symétriques d'ordre  $p$  et la notation  $X(x) \preceq 0$  signifie que  $X(x)$  est semi-définie négative. Enfin, MINOS implémente une méthode de lagrangien augmenté projeté qui effectue une recherche linéaire pour améliorer la fonction objectif et réduire la violation des contraintes.

### 1.1.3 Méthodes de points intérieurs

Les méthodes de points intérieurs ont initialement été proposées par Frisch [65] en 1955. L'idée générale de ces méthodes consiste à approcher d'une manière itérative la solution des problèmes d'optimisation avec contraintes d'inégalité de la forme

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x) \\ & h(x) \geq 0, \end{aligned} \tag{P_I}$$

à partir de l'intérieur de l'ensemble réalisable  $\{x : h(x) > 0\}$ . Ces méthodes sont basées sur les méthodes barrières. Dans la littérature, quelques exemples de fonctions barrières

ont été proposés (par exemple la fonction inverse, la fonction quadratique inverse), mais la fonction barrière logarithmique, proposée par Frisch [65], reste l'exemple le plus répandu. La fonction barrière logarithmique associée au problème  $(P_I)$  est donnée par

$$B_\mu(x) := f(x) - \mu \sum_{i=1}^p \log(h_i(x)), \quad (1.1.6)$$

où  $\mu > 0$  est le paramètre barrière. La méthode barrière logarithmique consiste à trouver une solution du problème  $(P_I)$  en résolvant une suite de problèmes sans contrainte

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} B_\mu(x), \quad (1.1.7)$$

en conduisant le paramètre barrière vers zéro. Les conditions d'optimalité du premier ordre de ce problème sont données par

$$\nabla f(x) - \sum_{i=1}^p \frac{\mu}{h_i(x)} \nabla h_i(x) = 0, \quad (1.1.8)$$

Une étude extensive de cette méthode a été établie par Fiacco et McCormick [57]. Ces derniers ont montré que si  $x^*$  est une solution du problème  $(P_I)$  et  $x^*(\mu)$  est une solution du problème (1.1.7), alors sous des hypothèses standards, on a

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} x^*(\mu) = x^* \quad \text{et} \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\mu}{h_i(x^*(\mu))} = z^*,$$

où  $z^*$  est le multiplicateur de Lagrange optimal associé aux contraintes d'inégalité. Comme pour la méthode de pénalisation quadratique, l'attention accordée aux méthodes barrières logarithmiques *primales* n'a pas duré longtemps et les praticiens les ont rapidement abandonnées pour deux raisons principales. La première est liée au mauvais conditionnement associé à la minimisation de  $B_\mu$  lorsque la valeur du paramètre barrière devient petite même si le problème  $(P_I)$  est bien conditionné. En particulier, il a été démontré dans [92, 95] que lorsque le nombre de contraintes actives en la solution est strictement inférieur à  $n$ , le conditionnement de la matrice hessienne de  $B_\mu$  est du même ordre que l'inverse du paramètre barrière. La deuxième raison est l'apparition de nouvelles méthodes plus efficaces pour la résolution du problème  $(P_I)$  telles que la méthode de programmation quadratique successive et la méthode de lagrangien augmenté.

Comme alternative à la méthode barrière logarithmique *classique*, Polyak [101] a proposé la méthode barrière logarithmique *modifiée* basée sur la minimisation successive de la fonction suivante :

$$M_{\lambda, \mu}(x) := f(x) - \mu \sum_{i=1}^p z_i \log\left(1 + \frac{h_i(x)}{\mu}\right), \quad (1.1.9)$$

où  $z \geq 0$  est une estimation du multiplicateur de Lagrange. Ce choix a essentiellement été motivé par l'équivalence suivante :

$$\forall \mu > 0, \quad \mu \log\left(1 + \frac{h_i(x)}{\mu}\right) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad h_i(x) \geq 0,$$

pour tout  $i \in \{1, \dots, p\}$ . La fonction  $M_{\lambda, \mu}$  peut être interprétée comme étant le lagrangien associé au problème suivant :

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x) \\ \text{s.c.} \quad & \mu \log\left(1 + \frac{h_i(x)}{\mu}\right) \geq 0, \quad i = 1, \dots, p. \end{aligned}$$

Polyak a établi des résultats de convergence similaires à ceux de la méthode de lagrangien augmenté. En particulier, il a démontré qu'à condition que la valeur de  $\mu$  soit suffisamment petite et autres hypothèses standards soient satisfaites, la minimisation successive de  $M_{\lambda, \mu}$  dans laquelle  $\mu$  est fixée et le multiplicateur de Lagrange est mis à jour avec la règle

$$[z^+]_i = \frac{[z]_i}{h_i(x)/\mu + 1},$$

converge vers la solution du problème  $(P_I)$  avec un taux de convergence au moins linéaire. Ceci implique que les difficultés numériques associées aux méthodes barrières logarithmiques classiques peut être évitées avec cette approche. Des résultats numériques montrant la supériorité des performances de la méthode barrière logarithmique modifiée par rapport à celle classique ont été rapportés par Breitfeld et Shanno [27, 28] et Nash, Polyak et Sofer [97]. Suite à la découverte de l'algorithme de Karmarkar [84] et motivé par son grand succès à la résolution des problèmes d'optimisation linéaire [86], les méthodes de points intérieurs primales-duales ont fait l'objet d'une grande attention de la communauté d'optimisation pour la résolution des problèmes d'optimisation non linéaire de la forme  $(P_I)$  (voir par exemple [62, 80, 98]). Ces méthodes sont une approche alternative aux méthodes d'ensemble actif. Elles sont essentiellement basées sur l'application de la méthode de Newton à une formulation primale-duale des conditions d'optimalité du problème barrière (1.1.7) tout en conduisant le paramètre barrière  $\mu$  vers zéro. Ces conditions d'optimalité perturbées sont obtenues en introduisant une variable auxiliaire  $z = \mu H(x)^{-1}e$  dans les conditions d'optimalité (1.1.8) et sont données par

$$\nabla f(x) - \nabla h(x)z = 0 \quad \text{et} \quad H(x)z = \mu e, \quad (1.1.10)$$

où  $H(x) = \text{diag}(h(x))$ . Sous des conditions de régularité standards, ces deux équations définissent localement une trajectoire différentiable paramétrée par  $\mu$ , appelée *chemin central*, dont le point limite est la solution primale-duale optimale  $(x^*, z^*)$  du problème initial  $(P_I)$  (voir, par exemple, [62, 126]).

Notons ici que la variable auxiliaire  $z$ , qui n'est autre que le multiplicateur de Lagrange associé aux contraintes d'inégalité, peut être introduite d'une manière naturelle en considérant la formulation suivante du problème  $(P_I)$  :

$$\begin{aligned} \min_{x, s} \quad & f(x) - \mu \sum_{i=1}^p \log([s]_i) \\ \text{s.c.} \quad & h(x) - s = 0, \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

où  $s \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur des variables d'écart. Les méthodes de points intérieurs basées sur la formulation (1.1.11) sont connues sous le nom des méthodes de points intérieurs *non réalisables*. Cette terminologie est utilisée pour indiquer qu'il n'est pas exigé que la

valeur initiale de  $x$  et les itérés générés par l'algorithme soient réalisables. L'avantage de la formulation (1.1.11) est que le point de départ est facile à trouver alors que pour la formule (1.1.6), il est coûteux, voire impossible, de trouver un point réalisable.

La convergence locale des méthodes de points intérieurs primales-duales a largement été étudiée, par exemple, dans [12, 55, 75, 76, 93, 113, 129]. Sous des hypothèses standards, la convergence superlinéaire et quadratique locale ont été démontrées. Les études de convergence locale sont généralement basées sur l'hypothèse que les itérés doivent rester dans un voisinage du chemin central, défini par les équations (1.1.10), en résolvant, à chaque itération, le problème barrière ( $P_I$ ) avec une tolérance du même ordre que le paramètre barrière [54, 55, 75, 76, 93, 133]. Armand et Benoist [8] ont montré que lorsque le paramètre barrière converge vers zéro avec un taux de convergence au plus superlinéaire et que le système de Newton est résolu de manière exacte, la suite des itérés devient asymptotiquement tangente au chemin central et par conséquent, il n'est pas nécessaire de forcer les itérés à le suivre dès les premières itérations. Ce résultat a été exploité dans le travail de Armand, Benoist et Orban [13] pour concevoir un algorithme globalement convergent. Notons enfin que l'extension du résultat démontré dans [8] au cas où le système de Newton est résolu de manière inexacte a été proposée par Armand, Benoist et Dussault dans [10] avec une nouvelle démonstration.

Pour forcer la convergence globale des méthodes de points intérieurs, la stratégie de recherche linéaire basée sur des fonctions de mérite primales ont été proposées par Akrotirianakis et Rustem [1, 2], Conn, Gould et Toint [41], El-Bakry *et al.* [55], Gay, Overton et Wright [66], Liu et Sun [90, 91], Moguerza et Prieto [94], Vanderbei et Shanno [117] et Yamashita [128]. Les stratégies de région de confiance utilisant une fonction de mérite primale ont été utilisées par Byrd *et al.* [32, 31, 33], Conn *et al.* [38], Dennis, Heinkenschloss et Vicente [47], Tseng [114], Waltz *et al.* [122] et Yamashita, Yabe et Tanabe [133]. D'après Gould, Orban et Toint [80], l'inconvénient majeur de l'utilisation des fonctions de mérites primales est qu'elles sont capables seulement de contrôler le pas primal et par la suite le pas dual doit être contrôlé par d'autres moyens. Pour éviter ce problème, des fonctions de mérite primales-duales ont été proposées par Argaez et Tapia [6], El-Bakry *et al.* [55], Gertz et Gill [67], Gill et Robinson [70, 71] et Yamashita et Yabe [130]. En particulier, El-Bakry *et al.* ont utilisé la norme des conditions d'optimalité du problème ( $P_{EI}$ ) et Argaez et Tapia ont combiné la fonction de lagrangien augmenté et la fonction barrière. Une autre stratégie pour globaliser les méthodes d'optimisation non linéaire est d'utiliser un filtre. Cette technique, proposée pour la première fois par Fletcher et Leyffer [60], a été utilisée dans le contexte des méthodes de points intérieurs par Benson, Shanno et Vanderbei [17], M. Ulbrich, S. Ulbrich et Vicente [116] et Wächter et Biegler [121].

Malgré ses performances numériques intéressantes, les méthodes de points intérieurs basées sur une stratégie de recherche linéaire présentent des difficultés pour la convergence globale. Wächter et Biegler [119] ont proposé et analysé un exemple, bien posé dans le sens où la complémentarité stricte et la condition suffisante de second ordre sont vérifiées à la solution, pour lequel toute méthode qui génèrent des directions en linéarisant les contraintes et qui forcent les contraintes d'inégalité en utilisant une règle de fraction du déplacement à la frontière converge vers de fausses solutions. Une alternative naturelle est d'utiliser les méthodes basées sur une stratégie de région de confiance qui ne sont pas affectées par un tel échec. Récemment, Chen et Goldfarb [36] ont montré que les

méthodes basées sur la résolution du problème sans contrainte

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + \frac{1}{2\mu} \|g(x)\|^2 - \mu \sum_{i=1}^n \log(h_i(x)). \quad (1.1.12)$$

ne sont pas encore affectées par l'échec associé aux méthodes de points intérieurs basées sur une stratégie de recherche linéaire. Les algorithmes basés sur ce type d'approche ont été étudiés par Armand [7], Benchakroun, Dussault et Mansouri [16], Chen et Goldfarb [36], Forsgren et Gill [61], Gill et Robinson [70, 71], Goldfarb *et al.* [73], Gould, Orban et Toint [78], Tits *et al.* [113] et Yamashita et Yabe [130].

Les méthodes de points intérieurs ont été implémentées dans KNITRO [34], LOQO [117] et IPOPT [121]. KNITRO inclut deux algorithmes : le premier est un algorithme de l'ensemble actif basé sur une méthode de programmation quadratique séquentielle linéaire et le deuxième est un algorithme de points intérieurs. Dans ce deuxième algorithme, KNITRO offre deux options pour résoudre le système linéaire : soit il est résolu avec une approche de gradient conjugué itératif et dans ce cas la globalisation se fait avec une technique de région de confiance, soit il est résolu avec une factorisation directe et la globalisation est assurée à l'aide d'une technique de recherche linéaire. Le code LOQO est une extension des méthodes de points intérieurs pour l'optimisation linéaire et quadratique. Il utilise une technique de recherche linéaire pour forcer la globalisation. IPOPT implémente une méthode de points intérieurs primale-duale qui utilise une stratégie de recherche linéaire basée sur les techniques de filtre. Le point commun de ces trois codes est qu'ils sont tous basés sur des méthodes primales/primales-duales. En effet, qu'il s'agisse d'une technique de région de confiance ou de recherche linéaire, la globalisation de KNITRO, LOQO ou IPOPT s'effectue *seulement* dans l'espace primal. Par contre, dans le reste des étapes de ces algorithmes (résolution du système linéaire, calcul des longueurs des pas de recherche, ...), le contrôle des itérés s'effectue dans l'espace primal-dual. Nous terminons cette section par mentionner que les deux codes, KNITRO et LOQO, sont commerciaux, tandis que IPOPT est librement disponible.

### 1.1.4 Méthode de programmation quadratique successive

La méthode de programmation quadratique successive (SQP) reste, sans doute, parmi les méthodes efficaces pour résoudre ( $P_{EI}$ ). Cette méthode, proposée pour la première fois en 1963 dans la thèse de Wilson [124], consiste à minimiser successivement un modèle quadratique de la fonction objectif sujet à une linéarisation des contraintes autour de l'itéré actuel. Beaucoup de solveurs sont basés sur cette méthode. Parmi eux, nous citons FILTERSQP [60] et SNOPT [68]. Vu que notre étude ne concerne pas directement ce type d'approche, nous recommandons aux lecteurs de consulter les références suivantes : [23, Ch. 7], [41, Ch. 16], [59, Ch. 25], ou [99, Ch. 18].

## 1.2 Objectifs et contenu de la thèse

Cette thèse s'inscrit dans le cadre de la conception, l'analyse et la mise en œuvre d'algorithmes efficaces et fiables pour la résolution de problèmes d'optimisation non linéaire. Nous nous intéressons plus particulièrement aux méthodes *fortement primales-duales* dans



le sens où le contrôle des itérés s'effectue dans les deux espaces *primal* et *dual* tout au long du processus de la minimisation, incluant la phase de globalisation.

Le reste de ce manuscrit est divisé en quatre chapitres. Les chapitres 2 et 3 sont consacrés aux problèmes d'optimisation de la forme  $(P_E)$  et le chapitre 4 concerne les problèmes plus généraux de la forme  $(P_{EI})$ . Chacun de ces trois chapitres commence par une description détaillée de l'algorithme proposé. Ensuite, l'étude de convergence globale et asymptotique est établie. Enfin, des résultats numériques validant ceux théoriques sont donnés. Les trois algorithmes primaux-duaux développés sont implémentés dans un nouveau solveur pour l'optimisation non linéaire.

Dans le chapitre 2, nous présentons un algorithme primal-dual dont l'idée générale est de résoudre, avec une méthode de type Newton, des conditions d'optimalité issues d'une pénalisation quadratique des contraintes. La globalisation de cet algorithme se base sur une technique de recherche linéaire. Comme dans les méthodes primales-duales, notre algorithme utilise deux types d'itérations. Au cours d'une itération *externe*, les paramètres de l'algorithme sont mis à jour, un système linéaire est résolu et un pas de Newton est effectué. Si l'itéré de Newton réalise un progrès suffisant vers la solution des conditions d'optimalité perturbées, alors l'itération est terminée. Sinon, une suite d'itérations *internes* est appliquée pour avoir une décroissance suffisante d'une fonction de mérite primale-duale. Une caractéristique importante de notre algorithme est que le paramètre de pénalisation est autorisé à augmenter au cours des itérations internes, alors qu'il est généralement maintenu fixe. Ceci aboutit à une amélioration remarquable des performances numériques de l'algorithme. Une analyse théorique de l'algorithme, incluant la convergence globale et asymptotique, est présentée. En particulier, la convergence superlinéaire est démontrée. Des tests numériques montrent que cette méthode est efficace et robuste, en particulier pour la résolution des problèmes dégénérés pour lesquels la matrice jacobienne des contraintes n'est pas de plein rang.

L'algorithme primal-dual proposé au chapitre 3 est une amélioration de celui du chapitre 2. Il est basé sur la résolution, avec une méthode de type Newton, des conditions d'optimalité issues d'une reformulation du problème initial en introduisant un lagrangien augmenté pour traiter les contraintes d'égalité, au lieu d'une pénalisation quadratique, tout en mettant à jour les paramètres de l'algorithme de façon à garantir la convergence globale vers une solution du problème initial. Un aspect important de cette approche est qu'avec un bon réglage des paramètres, le paramètre de pénalisation et l'estimation du multiplicateur de Lagrange, la méthode proposée se réduit asymptotiquement à une méthode de Newton régularisée appliquée au système d'optimalité du problème initial. Dans ce cas et vu que le paramètre de pénalisation est conduit vers zéro indépendamment de la diminution de la violation des contraintes, la convergence quadratique est obtenue. Les résultats numériques montrent que la nouvelle implémentation améliore d'une manière remarquable l'efficacité de celle du chapitre 2 surtout pour les problèmes dégénérés.

L'algorithme primal-dual présenté au chapitre 4 est une extension de celui du chapitre 3 pour résoudre les problèmes d'optimisation avec des contraintes d'égalité et d'inégalité. Il est basé sur une méthode Newtonienne appliquée au système d'optimalité perturbé issu d'une reformulation du problème initial en introduisant un lagrangien augmenté pour traiter les contraintes d'égalité et une pénalisation logarithmique pour les contraintes de borne. La globalisation est effectuée par une méthode de recherche linéaire dans l'espace des variables primales et duales. Les résultats théoriques de convergence

globale et asymptotique sont présentés. En particulier, la convergence superlinéaire est obtenue. Des tests numériques sont présentés pour montrer les performances de notre méthode. Ces tests numériques incluent une comparaison de notre méthode avec d'autres implémentations bien établies.

Finalement, nous résumons les contributions de cette thèse et discutons les perspectives de ce travail au chapitre 5.

## 1.3 Notations, définitions et résultats utiles

Étant donné deux vecteurs  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , le produit scalaire euclidien est noté et défini par

$$x^\top y := \sum_{i=1}^n [x]_i [y]_i,$$

où  $[x]_i$  est la  $i$ -ème composante du vecteur  $x$ . La norme associée est définie par

$$\|x\| := (x^\top x)^{\frac{1}{2}}.$$

La norme matricielle subordonnée est définie pour toute matrice  $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$  par

$$\|M\| := \max\{\|Mx\| : \|x\| = 1\}.$$

La boule ouverte de centre  $x$  et de rayon  $\varepsilon$  est définie par

$$\mathcal{B}(x, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| < \varepsilon\}.$$

Le produit de Hadamard de deux vecteurs  $x$  et  $y$ , noté  $x \circ y$ , est défini par

$$[x \circ y]_i = [x]_i [y]_i,$$

pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ . La partie positive d'un nombre réel  $t$  est la fonction définie par  $t^+ = \max\{t, 0\}$ .

En introduisant le vecteur des variables d'écart  $s \in \mathbb{R}^p$ , le problème d'optimisation (1.0.1) peut être écrit sous la forme équivalente suivante :

$$\begin{aligned} \min_{x, s} \quad & f(x) \\ \text{s.c.} \quad & g(x) = 0, \\ & h(x) - s = 0, \\ & s \geq 0. \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

Par conséquent, dans le but de simplifier la présentation des résultats de cette thèse et plus précisément du chapitre 4, nous supposons que le problème d'optimisation a la forme

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x) \\ \text{s.c.} \quad & g(x) = 0, \\ & x \geq 0. \end{aligned} \tag{P_{EI}}$$



Soit  $X$  l'ensemble des solutions admissibles du problème  $(P_{EI})$  :

$$X := \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0, x \geq 0\}.$$

Un point admissible  $x^* \in X$  est un minimum *global* du problème  $(P_{EI})$  si

$$\forall x \in X, \quad f(x^*) \leq f(x).$$

Un point admissible  $x^* \in X$  est un minimum *local* du problème  $(P_{EI})$  s'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que

$$\forall x \in X \cap \mathcal{B}(x^*, \varepsilon), \quad f(x^*) \leq f(x).$$

Le lagrangien du problème  $(P_{EI})$  est la fonction  $\mathcal{L} : \mathbb{R}^{n+m+n} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\mathcal{L}(x, y, z) = f(x) + y^\top g(x) - z^\top x, \quad (1.3.2)$$

où  $x$  est la variable primale et la paire  $(y, z) \in \mathbb{R}^{m+n}$  représente les variables duales. Le gradient et la matrice hessienne de  $\mathcal{L}$  par rapport à la variable primale sont donnés par

$$\nabla_x \mathcal{L}(x, y, z) = \nabla f(x) + \nabla g(x)y - z$$

et

$$\nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(x, y, z) = \nabla^2 f(x) + \sum_{i=1}^m [y]_i \nabla^2 g_i(x).$$

Posons  $N = n + m + n$ ,  $w = (x, y, z)$  et  $v = (x, z)$ . Les conditions nécessaires du premier ordre du problème  $(P_{EI})$  sont

$$F_0(w) = 0 \quad \text{et} \quad v \geq 0, \quad (1.3.3)$$

où  $F_0 : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  est définie par

$$F_0(w) = \begin{pmatrix} \nabla_x \mathcal{L}(w) \\ g(x) \\ XZe \end{pmatrix}, \quad (1.3.4)$$

où  $X = \text{diag}([x]_1, \dots, [x]_n)$ ,  $Z = \text{diag}([z]_1, \dots, [z]_n)$  et  $e = (1, \dots, 1)^\top$ . La matrice jacobienne par rapport à  $w$  de  $F_0$  est donnée par

$$F'_0(w) = \begin{pmatrix} \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(w) & \nabla g(x) & -I \\ \nabla g(x)^\top & 0 & 0 \\ Z & 0 & X \end{pmatrix}.$$

**Remarque 1.3.1.** Dans le cas d'étude du problème d'optimisation  $(P_E)$ , les définitions de  $N$ ,  $w$ ,  $\mathcal{L}$  et  $F_0$  seront

$$N = n + m, \quad w = (x, y), \quad \mathcal{L}(w) = f(x) + y^\top g(x) \quad \text{et} \quad F_0(w) = \begin{pmatrix} \nabla_x \mathcal{L}(w) \\ g(x) \end{pmatrix}.$$

Pour étudier les propriétés de convergence des méthodes proposées, on va utiliser les notations de Landau. Étant donné deux suites de nombre positifs  $\{a_k\}$  et  $\{b_k\}$ , on écrit  $a_k = O(b_k)$  s'il existe une constante  $C > 0$  telle que  $a_k \leq Cb_k$  pour tout indice  $k$  suffisamment grand. Dans ce cas, on écrit encore  $b_k = \Omega(a_k)$ . On écrit  $a_k = o(b_k)$  s'il existe une suite  $\{\varepsilon_k\}$  convergente vers 0 telle que  $a_k = \varepsilon_k b_k$ , pour tout  $k$  suffisamment grand. Finalement, on écrit  $a_k = \Theta(b_k)$  si et seulement si  $a_k = O(b_k)$  et  $a_k = \Omega(b_k)$ .

**Définition 1.3.1 (LICQ).** *La condition de qualification d'indépendance linéaire (LICQ) est satisfaite en  $x \in X$  si et seulement si l'ensemble de vecteurs  $\{\nabla g_i(x) : i = 1, \dots, m\} \cup \{e_i, i \in \mathcal{A}\}$  est linéairement indépendant, où  $\mathcal{A} := \{i : [x]_i = 0\}$ .*

Lorsque la condition de qualification LICQ est satisfaite en  $x^* \in X$ , alors il existe un vecteur unique de multiplicateur de Lagrange  $(y^*, z^*) \in \mathbb{R}^{m+n}$  tel que  $w^* := (x^*, y^*, z^*)$  est une solution des conditions d'optimalité du problème ( $P_{EI}$ ).

**Définition 1.3.2 (MFCQ).** *La condition de qualification de Mangasarian-Fromovitz (MFCQ) est satisfaite en  $x \in X$  si et seulement si l'ensemble des vecteurs  $\{\nabla g_i(x) : i = 1, \dots, m\}$  est linéairement indépendant et il existe un vecteur  $d$  tel que*

1.  $\nabla g_i(x)^\top d = 0$  pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$  et
2.  $d_i > 0$  pour tout  $i \in \mathcal{A}$ .

D'après ces deux définitions, il est facile de remarquer que

$$LICQ \Rightarrow MFCQ.$$

Pour le problème ( $P_E$ ), cette implication devient une équivalence.

**Définition 1.3.3 (SOSC).** *Soit  $w$  solution de (1.3.3). La condition suffisante de second ordre (SOSC) est satisfaite en  $w$  si et seulement si  $u^\top \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(w) u > 0$  pour tout  $u \neq 0$  tel que  $\nabla g(x)^\top u = 0$  et  $[u]_i = 0$  pour tout  $i \in \mathcal{A}$ .*

Supposons que pour un point admissible  $x^* \in X$  il existe un vecteur de multiplicateur de Lagrange  $(y^*, z^*) \in \mathbb{R}^{m+n}$  tel que  $w^*$  est une solution de (1.3.3). Supposons encore que la SOSC est satisfaite, alors  $x^*$  est un minimum local strict du problème ( $P_{EI}$ ).

**Définition 1.3.4 (SC).** *Soit  $w$  solution de (1.3.3). Nous dirons que la complémentarité stricte (SC) est satisfaite en  $w$  si et seulement si pour chaque  $i \in \{1, \dots, n\}$ , nous avons*

$$[x]_i > 0 \iff [z]_i = 0.$$

D'une manière équivalente, nous avons

$$b := \min\{[x]_i + [z]_i : i = 1, \dots, n\} > 0.$$

Donnons maintenant un résultat très important dans l'analyse de convergence asymptotique des méthodes proposées par la suite. Cette propriété importante est à l'origine de plusieurs résultats utiles pour l'étude locale de nos algorithmes. La preuve de ce résultat est donnée ci-dessous (voir [16, 57]).

**Théorème 1.3.1.** *Soit  $w^*$  solution de (1.3.3). Supposons que les hypothèses LICQ, SOSC et SC soient satisfaites en  $w^*$ . Alors, la matrice  $F'_0(w^*)$  est inversible.*

**Preuve.** Soit  $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ . Pour montrer que la matrice  $F'_0(w^*)$  est inversible, il suffit de montrer que

$$F'_0(w^*)u = 0 \quad (1.3.5)$$

implique que  $u = 0$ . Le système linéaire (1.3.5) peut être écrit sous la forme

$$\nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(w^*)u_1 + \nabla g(x^*)u_2 - u_3 = 0, \quad (1.3.6)$$

$$\nabla g(x^*)^\top u_1 = 0, \quad (1.3.7)$$

$$Z^*u_1 + X^*u_3 = 0, \quad (1.3.8)$$

où  $X^* = \text{diag}(x^*)$  et  $Z^* = \text{diag}(z^*)$ . En utilisant l'hypothèse de complémentarité stricte, l'équation (1.3.8) donne

$$[u_1]_i = 0, \quad i \in \mathcal{A}, \quad (1.3.9)$$

$$[u_3]_i = 0, \quad i \notin \mathcal{A}. \quad (1.3.10)$$

En multipliant le système (1.3.5) par  $u^\top$ , nous obtenons

$$u_1^\top \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(w^*)u_1 + 2u_2^\top \nabla g(x^*)^\top u_1 - u_1^\top u_3 + u_3^\top (Z^*u_1 + X^*u_3) = 0.$$

En utilisant (1.3.7), (1.3.8) et (1.3.9), la dernière relation se réduit à

$$u_1^\top \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(w^*)u_1 = 0. \quad (1.3.11)$$

Sachant que  $\nabla g(x^*)^\top u_1 = 0$  et  $[u_1]_i = 0$  pour tout  $i \in \mathcal{A}$  et rappelant que la SOSC est satisfaite en  $x^*$ , nous déduisons que  $u_1 = 0$ . En utilisant ceci, (1.3.10) et l'équation (1.3.6), nous obtenons les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} (1.3.6) &\Leftrightarrow \nabla g(x^*)u_2 - u_3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^m [u_2]_i \nabla g_i(x^*) - \sum_{i=1}^n [u_3]_i e_i = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^m [u_2]_i \nabla g_i(x^*) - \sum_{i \in \mathcal{A}} [u_3]_i e_i = 0. \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

Puisque la LICQ est satisfaite, la relation (1.3.12) implique que  $u_2 = 0$  et  $[u_3]_i = 0$  pour tout  $i \in \mathcal{A}$ . En combinant ceci avec (1.3.10) et rappelant que  $u_1 = 0$ , nous obtenons  $u = 0$ , ce qui termine la preuve du théorème.  $\square$

**Définition 1.3.5 (Inertie d'une matrice).** *L'inertie d'une matrice symétrique  $M$ , notée  $\text{In}(M)$ , est le triplet  $(n_+, n_-, n_0)$  indiquant le nombre de valeurs propres positives, négatives et nulles de  $M$ .*

**Lemme 1.3.1 (Loi d'inertie de Sylvester [62, Lemme A.12]).** *Étant donné une matrice symétrique  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et une matrice inversible  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Alors,  $\text{In}(PQP^\top) = \text{In}(Q)$ .*

**Lemme 1.3.2.** *Soit*

$$M_\sigma = \begin{pmatrix} G & A \\ A^\top & -\sigma I \end{pmatrix},$$

où  $\sigma > 0$ ,  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est une matrice symétrique,  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  et  $I$  est la matrice identité. Alors, la matrice  $G + \frac{1}{\sigma}AA^\top$  est définie positive si et seulement si  $\text{In}(M_\sigma) = (n, m, 0)$ .

**Preuve.** On a  $M_\sigma = PQP^\top$ , où  $P$  et  $Q$  sont données par

$$P = \begin{pmatrix} I & -\frac{1}{\sigma}A \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} G + \frac{1}{\sigma}AA^\top & 0 \\ 0 & -\sigma I \end{pmatrix}.$$

D'après la loi d'inertie de Sylvester, on a

$$\begin{aligned} \text{In}(M_\sigma) &= \text{In}(Q) \\ &= \text{In}\left(G + \frac{1}{\sigma}AA^\top\right) + (0, m, 0), \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve du lemme. □

**Lemme 1.3.3 (Lemme de Debreu [46]).** *Étant donné une matrice symétrique  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et une matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . Alors,  $x^\top Gx > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  vérifiant  $A^\top x = 0$  si et seulement s'il existe  $\bar{\sigma} > 0$  tel que pour tout  $\sigma \in ]0, \bar{\sigma}]$ ,  $G + \frac{1}{\sigma}AA^\top$  est définie positive.*

**Profils de performance** Tous les résultats numériques de cette thèse seront présentés en utilisant les profils de performance de Dolan et Moré [51]. Ces derniers permettent de comparer de manière objective les performances de plusieurs codes exécutés sur le même ensemble de problèmes. Nous décrivons brièvement ici la méthodologie. Supposons qu'on veut comparer le temps CPU (ou le nombre d'évaluations de fonctions ou de gradients, le nombre d'itérations, ...). Soient  $\mathcal{P}$  une collection de problèmes tests et  $t_{p,s}$  le temps CPU demandé par le solveur  $s$  pour résoudre le problème  $p \in \mathcal{P}$ . Alors, l'indice de performance du solveur  $s$  sur le problème  $p$  est défini par

$$r_{p,s} = \begin{cases} \frac{t_{p,s}}{\min\{t_{p,s} : \text{pour tout solveur } s\}} & \text{si } p \text{ est résolu par } s, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le profil de performance logarithmique du solveur  $s$  est la courbe définie par

$$\rho_s(\tau) = \frac{|\{p \in \mathcal{P} : r_{p,s} \leq 2^\tau\}|}{|\mathcal{P}|},$$

pour  $\tau \geq 0$ . Cette courbe représente la fraction des problèmes pour lesquels la performance du solveur  $s$  se situe à un facteur  $2^\tau$  du meilleur solveur. Les valeurs  $\rho_s(\tau \equiv 0)$  et  $\rho_s(\tau \equiv \infty)$  sont associées respectivement à l'efficacité et la robustesse du solveur  $s$ .

**Exemple 1.3.1.** La figure 1.1 compare les performances de trois solveurs en terme de temps CPU sur une collection de 500 problèmes. Les taux d'efficacité des solveurs  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont respectivement 32%, 47% et 19%. Quant à la robustesse, il est clair que le solveur

*A est le plus robuste. Il est capable de résoudre 85% des problèmes tandis que les solveurs B et C résolvent respectivement 78% et 64% des problèmes.*

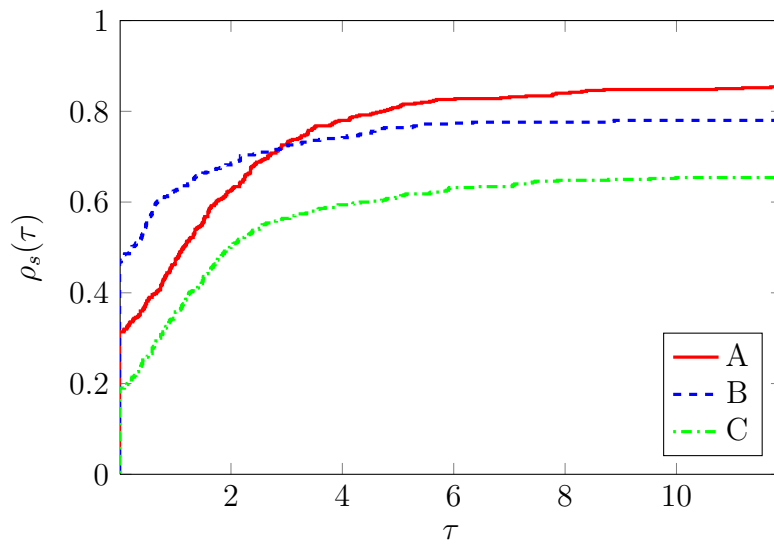


FIGURE 1.1 – Profil de performance comparant trois solveurs A, B, et C en terme de temps CPU.

## Chapitre 2

# Une méthode de pénalisation quadratique primale-duale pour l'optimisation avec contraintes d'égalité<sup>1</sup>

Dans ce chapitre, nous présentons un nouvel algorithme primal-dual pour la résolution des problèmes d'optimisation non linéaire de la forme

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x) \\ \text{s.c.} \quad & g(x) = 0. \end{aligned} \tag{P_E}$$

Nous considérons le problème de pénalisation quadratique associé au problème (P\_E)

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + \frac{1}{2\sigma} \|g(x)\|^2, \tag{2.0.1}$$

où  $\sigma > 0$  est un paramètre de pénalisation. Les conditions du premier ordre de (2.0.1) sont

$$\nabla f(x) + \frac{1}{\sigma} \nabla g(x) g(x) = 0. \tag{2.0.2}$$

En introduisant la variable  $y = \frac{1}{\sigma} g(x)$ , les conditions (2.0.2) peuvent être écrites sous la forme suivante

$$F(w, \sigma) := \begin{pmatrix} \nabla_x \mathcal{L}(w) \\ g(x) - \sigma y \end{pmatrix} = 0. \tag{2.0.3}$$

La résolution du problème (P\_E) se base sur l'application d'une méthode de type Newton au système (2.0.3) tout en conduisant le paramètre  $\sigma$  vers 0. Le système linéaire à résoudre à l'itération  $k$  a la forme

$$J(w_k, \sigma_k)(w_k^+ - w_k) = -F(w_k, \sigma_k^+), \tag{2.0.4}$$

---

1. Ce travail est le sujet du papier publié [11], en collaboration avec P. Armand, J. Benoist et V. Pateloup.

où  $w_k^+$  est un nouvel itéré de Newton,  $\sigma_k^+$  est une nouvelle valeur du paramètre de pénalisation, la matrice  $J(w_k, \sigma_k)$  est donnée par

$$J(w_k, \sigma_k) = \begin{pmatrix} H_k & \nabla g(x) \\ \nabla g(x)^\top & -\sigma_k I \end{pmatrix}$$

et  $H_k$  est la matrice hessienne du lagrangien de  $(P_E)$  ou son approximation. Si la norme du résidu  $\|F(w_k^+, \sigma_k^+)\|$  est suffisamment petite, alors nous faisons  $w_{k+1} = w_k^+$  et  $\sigma_{k+1} = \sigma_k^+$ . Sinon, une suite d'itérations internes est appliquée pour diminuer ce résidu. Le but de cette procédure est de trouver une paire  $(w_{k+1}, \sigma_{k+1})$  vérifiant

$$\|F(w_{k+1}, \sigma_{k+1})\| \leq \varepsilon_k, \quad (2.0.5)$$

pour une tolérance  $\varepsilon_k > 0$ . Le choix de la tolérance  $\varepsilon_k$  joue un rôle très important pour l'efficacité de l'algorithme. Dans ce travail, nous avons utilisé un choix non monotone de  $\varepsilon_k$ , mais garantissant sa convergence vers zéro, qui est de la forme

$$\varepsilon_k = \rho \max \{ \|F(w_i, \sigma_i)\| : (k - \ell)^+ \leq i \leq k \} + \theta \sigma_k, \quad (2.0.6)$$

pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , où  $\rho \in [0, 1[$ ,  $\theta > 0$  et  $\ell$  est un entier prédéfini. La motivation de ce choix est le travail de Armand, Benoist et Orban [13] dans le contexte des méthodes de points intérieurs pour la résolution des problèmes de la forme  $(P_{EI})$ .

Pour garantir la convergence globale des itérations internes, nous avons utilisé une technique de recherche linéaire qui satisfait une condition d'Armijo par rebroussement le long d'une direction primale-duale  $d$ . Cette direction est la solution d'un système linéaire de la forme

$$J(w, \sigma) d = -F(w, \sigma).$$

Le contrôle des itérés est effectué dans les espaces primal et dual durant tout le processus de minimisation en utilisant la fonction de mérite primale-duale qui a la forme suivante

$$\varphi_\sigma(w) = f(x) + \frac{1}{2\sigma} \|g(x)\|^2 + \frac{\nu}{2\sigma} \|g(x) - \sigma y\|^2,$$

où  $\nu > 0$ . Pour faire face au mauvais conditionnement associé à la minimisation de  $\varphi_\sigma$  lorsque  $\sigma$  devient petit, le paramètre de pénalisation  $\sigma$  est autorisé à augmenter au cours des itérations internes. Cet aspect important nous a permis de gagner beaucoup en efficacité sans affecter la convergence globale de ces itérations. Dans le théorème suivant, nous donnons le résultat de convergence globale de l'algorithme des itérations internes.

**Théorème 2.0.2.** *Supposons que les suites  $\{\nabla g(x^i)\}$  et  $\{\nabla f(x^i)\}$  soient bornées et que les matrices  $H^i + \frac{1}{\sigma^i} \nabla g(x^i) \nabla g(x^i)^\top$  soient uniformément définies positives pour tout  $i \in \mathbb{N}$ . Alors, une des deux situations suivantes se produit.*

- (i) *L'algorithme des itérations internes converge dans le sens où  $\liminf \|F(w^i, \sigma^i)\| = 0$ .*
- (ii) *La suite des valeurs de la fonction objectif  $\{f(x^i)\}$  tend vers  $-\infty$ .*

Le théorème 2.0.2 implique que si la fonction objectif est bornée inférieurement et les hypothèses du théorème sont satisfaites, alors l'algorithme des itérations internes réussit, à chaque fois qu'il est appelé par l'algorithme global, à trouver une paire  $(w_{k+1}, \sigma_{k+1})$  qui satisfait (2.0.5).

Le théorème suivant décrit le comportement de la suite des itérés générés par l'algorithme global. Nous montrons que l'algorithme global termine soit avec un point qui satisfait les conditions d'optimalité du premier ordre du problème ( $P_E$ ) ou bien avec un point échouant à satisfaire la LICQ. Dans ce deuxième cas, la suite des multiplicateurs de Lagrange  $\{y_k\}$  est non bornée.

**Théorème 2.0.3.** *Soit  $\{w_k\}$  une suite générée par l'algorithme global. Si la suite  $\{\varepsilon_k\}$  tend vers zéro, alors  $\{F(w_k, \sigma_k)\}$  converge vers zéro. En plus, si nous supposons que la suite  $\{(\nabla f(x_k), \nabla g(x_k))\}$  est bornée, alors la suite  $\{x_k\}$  approche la stationnarité du problème  $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|g(x)\|^2$ , ce qui signifie que*

$$\lim \nabla g(x_k)g(x_k) = 0.$$

*En outre, un des deux résultats suivants est vrai.*

- (i) *La suite  $\{y_k\}$  est non bornée. Dans ce cas, les itérés  $\{x_k\}$  s'approchent d'un échec de la condition de qualification LICQ, ce qui signifie qu'il existe une suite de vecteurs unitaires  $\{u_k\}$  telle que*

$$\liminf \|\nabla g(x_k)u_k\| = 0.$$

- (ii) *La suite  $\{y_k\}$  est bornée. Dans ce cas, la suite des itérés primaux est asymptotiquement réalisable pour le problème ( $P_E$ ), ce qui signifie que*

$$\lim g(x_k) = 0.$$

En plus de l'analyse de convergence globale de l'algorithme interne et externe, l'étude théorique de notre méthode inclut aussi une analyse de convergence asymptotique. Dans cette étude, nous supposons que la suite générée par l'algorithme global converge vers une solution  $w^* := (x^*, y^*)$ . Sous des hypothèses de régularité standards à la solution, la matrice jacobienne de la fonction  $F(\cdot, 0)$  en  $w^*$  est inversible et donc le système (2.0.3) définit une courbe  $\sigma \mapsto \mathbf{w}(\sigma)$  qui vérifie l'équivalence suivante :

$$F(w, \sigma) = 0 \iff w = \mathbf{w}(\sigma), \quad (2.0.7)$$

pour des valeurs suffisamment petites de  $\sigma$ . Nous montrons que si la suite  $\{\sigma_k\}$  converge vers zéro avec un taux de convergence sous-quadratique, alors, notre algorithme se réduit à des itérations de Newton de la forme (2.0.4), sans avoir besoin aux itérations internes, ce qui implique que notre méthode ne souffre pas de l'effet de Maratos présent dans les méthodes SQP. De plus, la suite  $\{w_k\}$  est asymptotiquement tangente à la trajectoire  $\mathbf{w}$ . Tous ces résultats sont résumés dans le théorème suivant.

**Théorème 2.0.4.** *Soit  $\{w_k\}$  une suite convergente vers une solution  $w^*$ . Supposons que les hypothèses LICQ et SOSC soient satisfaites en  $w^*$  et que  $\|H_k - \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(w_k)\| \leq \beta \sigma_k$  pour une constante positive  $\beta$ . Si les suites  $\{\sigma_k\}$ ,  $\{\sigma_k^+\}$  et  $\{\varepsilon_k\}$  vérifient*

$$\beta \sigma_k^{1+r} \leq \sigma_k^+ \leq \gamma \sigma_k \quad \text{et} \quad \varepsilon_k \geq c \sigma_k^+,$$

*pour des constantes  $\beta > 0$ ,  $\gamma > 0$ ,  $r \in (0, 1)$  et  $c > 0$ , alors, la suite des itérés générés par l'algorithme global satisfait*

$$w_k = \mathbf{w}(\sigma_k) + o(\sigma_k). \quad (2.0.8)$$



De plus, pour tout indice  $k$  suffisamment grand, nous avons  $\|F(w_k^+, \sigma_k^+)\| \leq \varepsilon_k$ , ce qui implique que l'algorithme global n'a plus besoin d'itérations internes et donc  $(w_{k+1}, \sigma_{k+1}) = (w_k^+, \sigma_k^+)$ .

La relation (2.0.8) implique que, lorsque la norme de  $y^*$  est non nulle, la suite  $\{w_k\}$  converge vers  $w^*$  avec le même taux de convergence de  $\{\sigma_k\}$  vers zéro. En effet, une simple dérivation de la fonction  $\sigma \mapsto F(\mathbf{w}(\sigma), \sigma)$  donne

$$\mathbf{w}'(0) = F_0(w^*)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ y^* \end{pmatrix}.$$

Le résultat découle de cette relation et le fait que

$$\begin{aligned} w_k &= \mathbf{w}(\sigma_k) + o(\sigma_k) \\ &= w^* + \mathbf{w}'(0)\sigma_k + o(\sigma_k). \end{aligned}$$

Dans le cas où le multiplicateur de Lagrange optimal vaut zéro, la trajectoire  $\mathbf{w}(\cdot)$  se réduit au point  $w^*$ . Ce résultat découle directement de l'équivalence (2.0.7) et du fait que  $F(w^*, \sigma) = 0$  pour tout  $\sigma > 0$ .

Les performances de notre algorithme, appelé SPDOPT<sup>2</sup>, ont été évaluées en le comparant à IPOPT, une implémentation d'une méthode de points intérieurs qui se comporte comme une méthode SQP pour la résolution des problèmes avec seulement des contraintes d'égalité. La comparaison a été effectuée sur une collection de 109 problèmes, appelée collection *standard*, provenant de COPS [52] et CUTer [77] en utilisant les profils de performance de Dolan et Moré [51]. Les résultats numériques ont montré que notre méthode primale-duale est aussi efficace que IPOPT en terme de nombre d'évaluations de fonctions et de gradients et de temps CPU et un peu plus robuste.

Nous avons encore réalisé une comparaison de SPDOPT et IPOPT sur une collection de 109 problèmes dégénérés pour lesquels la jacobienne des contraintes n'est pas de plein rang. Cette nouvelle collection est obtenue de la même manière que dans [44], c'est à dire en introduisant une nouvelle contrainte d'égalité de la forme  $c_1(x) = c_1(x)^2$  à tous les problèmes de la collection standard, où  $c_1$  est la première contrainte du modèle. Avec cette modification, la matrice jacobienne des contraintes de chaque problème n'est pas de plein rang partout. Les profils de performance ont montré que SPDOPT est beaucoup plus efficace et robuste que IPOPT. Ce succès est dû en grande partie à la régularisation *naturelle* du problème initial. En effet, IPOPT introduit encore une régularisation dans le système linéaire sans modifier son second membre ce qui fait que la direction primale n'est plus une direction de descente de la fonction primale utilisée par IPOPT pour faire décroître la mesure d'infaisabilité primale.

Nous avons remarqué que la résolution des problèmes dégénérés est très sensible au taux de décroissance du paramètre de pénalisation  $\sigma_k$ . De meilleures performances ont été obtenues en faisant décroître le paramètre de pénalisation  $\sigma_k$  moins rapidement. En fait, les résultats présentés dans ce chapitre sont obtenus avec une mise à jour de la forme

$$\sigma_k^+ = \max(\min(\kappa_1 \sigma_k, \sigma_k^{\kappa_2}), \sigma_k^{\min}), \quad (2.0.9)$$

---

2. Strongly Primal-Dual OPTimization

où  $\kappa_1 = 0.1$ ,  $\kappa_2 = 1.8$  et  $\sigma_k^{\min}$  est une borne inférieure sur  $\sigma_k^+$  pour éviter les difficultés numériques dues aux petites valeurs de  $\sigma_k^+$ . Une exécution de SPDOPT avec les choix  $\kappa_1 = 0.2$  et  $\kappa_2 = 1.5$  permet de gagner en robustesse et en efficacité par rapport aux résultats obtenus avec les choix  $\kappa_1 = 0.1$  et  $\kappa_2 = 1.8$ . C'est pourquoi, il serait intéressant d'ajouter une procédure pour détecter si la jacobienne des contraintes n'est pas de plein rang et utiliser son résultat pour mettre à jour le paramètre de pénalisation. Cette modification permettra d'améliorer les performances de l'algorithme pour la résolution des problèmes dégénérés tout en protégeant sa grande efficacité pour résoudre les problèmes réguliers.

La dernière remarque concerne le choix de  $\varepsilon_k$  dans (2.0.6). Malgré ses bonnes performances pour résoudre les problèmes réguliers, nous avons remarqué qu'un choix plus conservatif du type

$$\varepsilon_k = \Theta(\sigma_k^+),$$

améliore les performances de SPDOPT pour résoudre les problèmes dégénérés.

Nous donnons ci-dessous deux profils comparant les performances de SPDOPT avec et sans les modifications qu'on vient de décrire. Nous notons par SPDOPT-1 la version de SPDOPT sans modification, c'est à dire  $\kappa_1 = 0.1$  et  $\kappa_2 = 1.8$  pour le choix de  $\sigma_k^+$  dans (2.0.9) et  $\rho = 0.9$  et  $\theta = 10$  pour le choix de  $\varepsilon_k$  dans (2.0.6). La version modifiée, notée SPDOPT-2, est implémentée en choisissant  $\kappa_1 = 0.2$ ,  $\kappa_2 = 1.5$ ,  $\rho = 0$  et  $\theta = 100$ . Selon les deux profils présentés dans la figure 2.1, nous observons que la version modifiée de SPDOPT améliore ses performances pour la résolution des problèmes dégénérés.

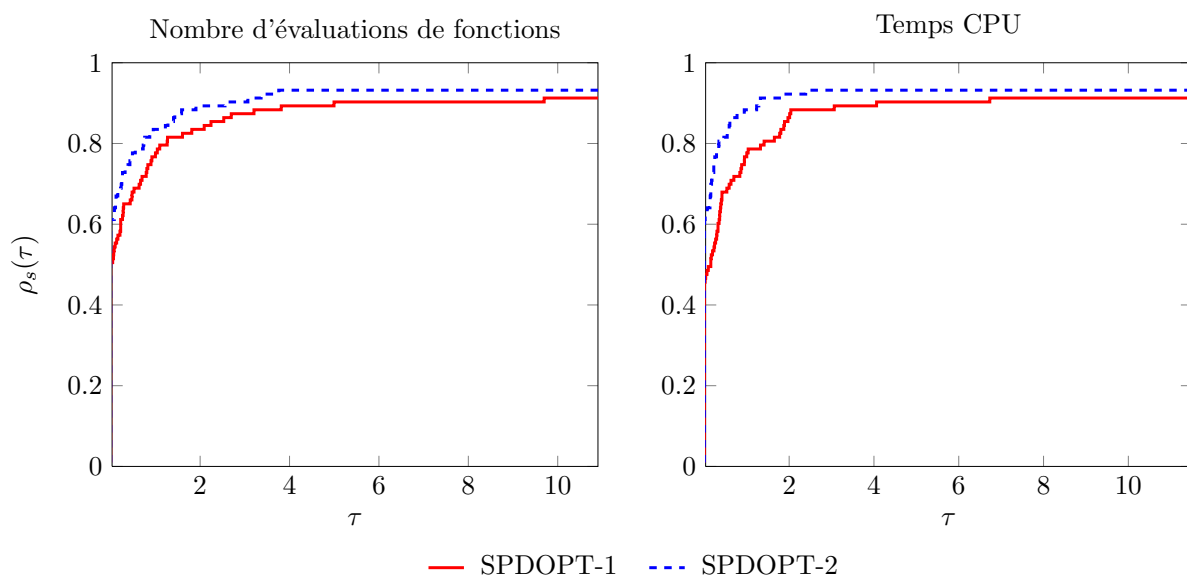


FIGURE 2.1 – Profils de performance de SPDOPT-1 et SPDOPT-2 sur une collection de 109 problèmes dégénérés.

Toutes les remarques données ci-dessus sont d'ordre numérique. Mais, elles présentent de vraies motivations pour faire une étude théorique complète du comportement de notre algorithme pour la résolution des problèmes dégénérés.

L'algorithme primal-dual proposé dans ce chapitre est inspiré de celui présenté dans la thèse d'Elsa Bousquet [26]. Les principales contributions de ce nouveau travail sont les suivantes.

- L'analyse de convergence a été complétée par une étude de convergence globale de l'algorithme d'itérations externes. Le résultat de cette étude est résumé dans le théorème 2.0.3.
- L'analyse théorique de notre algorithme est plus générale que celle présentée dans [26]. En particulier, notre analyse inclut la possibilité de ne pas utiliser la hessienne exacte lors du calcul de la direction de recherche au cours des itérations externes et internes.
- Au cours des itérations internes, le paramètre de pénalisation est autorisé à augmenter. Ceci a abouti à une étude de convergence complètement différente de celle proposée dans [26].
- Notre algorithme a été implémenté en C et ses bonnes performances ont été validées en le comparant à IPOPT, un solveur bien établi.

Computational Optimization and Applications  
December 2014, Volume 59, Issue 3, pp 405-433  
DOI : [10.1007/s10589-014-9679-3](https://doi.org/10.1007/s10589-014-9679-3)

# Study of a primal-dual algorithm for equality constrained minimization

Paul Armand · Joel Benoist · Riadh Omhenni · Vincent Pateloup

« Article non libre de droits, non reproduit par respect du droit d'auteur »



# Chapitre 3

## Une méthode de lagrangien augmenté primale-duale pour l’optimisation avec contraintes d’égalité<sup>3</sup>

### Sommaire

<b>3.1</b>	<b>Introduction et motivation</b>	<b>25</b>
<b>3.2</b>	<b>Description de l’algorithme</b>	<b>27</b>
3.2.1	Itération externe	27
3.2.2	Itération interne	30
<b>3.3</b>	<b>Analyse de convergence globale</b>	<b>32</b>
3.3.1	Itérations internes	32
3.3.2	Itérations externes	35
<b>3.4</b>	<b>Convergence asymptotique</b>	<b>39</b>
<b>3.5</b>	<b>Détails de l’implémentation</b>	<b>43</b>
<b>3.6</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>45</b>
3.6.1	Comparaison avec SPDOPT-QP	45
3.6.2	Comparaison avec d’autres méthodes de lagrangien augmenté	48
<b>3.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>51</b>

### 3.1 Introduction et motivation

Dans le chapitre précédent, nous avons proposé un algorithme primal-dual pour la résolution des problèmes d’optimisation avec seulement des contraintes d’égalité. Cet algorithme est basé sur une méthode de type Newton appliquée à une suite de conditions d’optimalité du problème de pénalisation quadratique associée à  $(P_E)$ . Ces conditions d’optimalité incluent une perturbation des contraintes d’égalité. Cette perturbation qui remplace les contraintes d’égalité  $g(x) = 0$  par  $g(x) - \sigma y = 0$ , offre une régularisation naturelle du système linéaire utilisé à chaque itération pour générer une direction de

---

3. Ce travail est le sujet de l’article soumis [14], en collaboration avec P. Armand.

recherche. Ceci permet à notre méthode de bien se comporter pour la résolution des problèmes dégénérés pour lesquels la matrice jacobienne des contraintes n'est pas de plein rang. Malgré ce succès, nous avons remarqué que la perturbation des contraintes par le terme  $\sigma y$  devient non négligeable, puisque pour ces problèmes les multiplicateurs de Lagrange sont non bornés.

La deuxième motivation est liée à l'analyse de convergence asymptotique de la méthode développée dans le chapitre 2. Celle-ci a été établie en se basant sur la notion de *trajectoire*. L'utilisation de cette dernière nous a permis d'avoir seulement une convergence superlinéaire. En considérant une nouvelle formulation du problème initial, nous allons montrer la convergence quadratique en s'acquittant de la notion de trajectoire. Ceci est réalisé en proposant une méthode qui se réduit asymptotiquement à une méthode de Newton régularisée sur le système d'optimalité initial.

Le but de ce chapitre est donc de proposer une nouvelle méthode qui permet d'améliorer celle du chapitre 2 en prenant en compte les remarques citées ci-dessus tout en conservant la régularisation naturelle du système linéaire et l'aspect primal-dual de la méthode permettant le contrôle des variables primales et duales tout au long du processus de minimisation.

Considérons le problème de lagrangien augmenté associé au problème ( $P_E$ )

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi_{\lambda, \sigma}(x) := f(x) + \lambda^\top g(x) + \frac{1}{2\sigma} \|g(x)\|^2, \quad (3.1.1)$$

où  $\sigma$  est le paramètre de pénalisation et  $\lambda$  est une estimation du multiplicateur de Lagrange. Les conditions d'optimalité du premier ordre de (3.1.1) sont

$$\nabla f(x) + \nabla g(x) \left( \lambda + \frac{1}{\sigma} g(x) \right) = 0.$$

En introduisant la variable  $y = \lambda + \frac{1}{\sigma} g(x)$ , ces conditions peuvent être écrites sous la forme suivante

$$F(w, \lambda, \sigma) := \begin{pmatrix} \nabla_x \mathcal{L}(w) \\ g(x) + \sigma(\lambda - y) \end{pmatrix} = 0. \quad (3.1.2)$$

Notons ici qu'en utilisant la notation introduite dans (1.3.4), nous obtenons

$$F(w, \lambda, \sigma) = F_0(w) + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda - y \end{pmatrix}.$$

L'idée essentielle de notre algorithme est d'appliquer au système (3.1.2) des itérations de type Newton au cours de lesquelles les suites  $\{\sigma_k\}$  et  $\{\lambda_k\}$  sont mises à jour. Étant donné  $\sigma_k > 0$  et une estimation  $w_k$ , de nouvelles valeurs  $\sigma_k^+ > 0$  et  $\lambda_{k+1}$  sont choisies par l'algorithme suivant le progrès réalisé par l'itéré actuel vers la faisabilité primale. Le nouvel itéré de Newton  $w_k^+ := (x_k^+, y_k^+)$  est ensuite donné par la solution du système linéaire primal-dual

$$\begin{pmatrix} H_k & \nabla g(x_k) \\ \nabla g(x_k)^\top & -\sigma_k^+ I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k^+ - x_k \\ y_k^+ - y_k \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla_x \mathcal{L}(w_k) \\ g(x_k) + \sigma_k^+ (\lambda_{k+1} - y_k) \end{pmatrix},$$

## 3.2. Description de l'algorithme

---

où  $H_k$  est la matrice hessienne du lagrangien ou son approximation et  $I$  est la matrice identité. En utilisant la définition de  $F_0$  dans (1.3.4), ce système linéaire s'écrit sous la forme

$$J(w_k, \sigma_k^+)(w_k^+ - w_k) = -F_0(w_k) - \sigma_k^+ \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_{k+1} - y_k \end{pmatrix}. \quad (3.1.3)$$

Si, à une itération  $k$ , nous choisissons  $\lambda_{k+1} = y_k$ , alors le second membre du système linéaire (3.1.3) est exactement  $-F_0(w_k)$ . Notons ici que  $\sigma_k^+$  apparaît dans la matrice et le second membre du système linéaire (3.1.3) contrairement à la méthode proposée dans le chapitre précédent. Ceci est indispensable pour montrer la convergence quadratique de notre algorithme.

Si la norme du résidu  $F(w_k^+, \lambda_{k+1}, \sigma_k^+)$  est estimée suffisamment petite, alors nous faisons  $w_{k+1} = w_k^+$  et  $\sigma_{k+1} = \sigma_k^+$ . Sinon, une suite d'itérations internes est appliquée afin de trouver une paire  $(w_{k+1}, \sigma_{k+1})$  satisfaisant la condition

$$\|F(w_{k+1}, \lambda_{k+1}, \sigma_{k+1})\| \leq \varepsilon_k,$$

pour une tolérance  $\varepsilon_k > 0$ . Un choix de  $\varepsilon_k$  similaire à celui proposé dans le chapitre 2 est utilisé. Pour garantir la convergence globale de ces itérations, une technique de recherche linéaire basée sur une fonction de mérite primale-duale est utilisée. Au cours de ces itérations, l'estimation du multiplicateur de Lagrange  $\lambda_{k+1}$  est maintenue fixe alors que le paramètre de pénalisation  $\sigma_{k+1}$  est autorisé à augmenter.

Le reste de ce chapitre est organisé comme suit. La section suivante est consacrée à la description du nouvel algorithme. L'analyse de convergence globale des itérations internes et externes est donnée dans la section 3.3. Dans la section 3.4, nous étudions le comportement asymptotique de la suite générée par l'algorithme global et nous donnons les conditions sous lesquelles le taux de convergence est quadratique. Nous terminons ce chapitre par la présentation des résultats numériques de notre implémentation pour la même collection de problèmes utilisée dans le chapitre 2. Ces résultats incluent une comparaison de la méthode développée dans ce chapitre avec celle du chapitre 2 et une deuxième comparaison avec deux autres codes basés sur la méthode de lagrangien augmenté : ALGENCAN [4, 5] et LANCELOT-A [40].

## 3.2 Description de l'algorithme

Comme celui présenté dans le chapitre 2, l'algorithme proposé dans ce chapitre utilise deux types d'itérations. Au cours des itérations externes, le paramètre de pénalisation et l'estimation du multiplicateur de Lagrange sont mis à jour, un pas d'extrapolation est calculé et la convergence globale de l'algorithme est testée. Une suite d'itérations internes est appliquée lorsque la décroissance de la norme du résidu  $\|F(w, \lambda, \sigma)\|$  est jugée insuffisante.

### 3.2.1 Itération externe

Nous décrivons maintenant la  $k$ -ème itération de notre algorithme d'itérations externes, spécifié comme Algorithme 3.1, pour résoudre  $(P_E)$ . L'algorithme est initialisé



avec un point de départ  $w_0 = (x_0, y_0)$ , un paramètre initial  $\sigma_0$ , une estimation initiale du multiplicateur de Lagrange  $\lambda_0 = y_0$  et trois constantes  $a, \rho \in ]0, 1[$  et  $\ell \in \mathbb{N}$ . L'indice d'itérations est initialisé à  $k = 0$  et un indice  $i_k$  est initialement fixé à 0.

---

**Algorithme 3.1** Itération externe

---

1. Choisir  $\zeta_k \geq 0$  et  $r_k > 0$  tels que  $\{\zeta_k\} \rightarrow 0$  et  $\{r_k\} \rightarrow 0$ . Faire  $\eta_k = \|g(x_k)\| + \zeta_k$ . Si

$$\|g(x_k)\| \leq a \max \{ \eta_{i_j} : (k - \ell)^+ \leq j \leq k \}, \quad (3.2.1)$$

alors aller à l'étape 2. Sinon, aller à l'étape 3.

2. Mettre à jour l'estimation du multiplicateur de Lagrange et éventuellement réduire le paramètre de pénalisation. Faire

$$\sigma_k^+ \leq \sigma_k, \quad s_k = \max \{ \sigma_k^+, r_k \}, \quad \lambda_{k+1} = y_k \quad \text{et} \quad i_{k+1} = k$$

et aller à l'étape 4.

3. Réduire suffisamment le paramètre de pénalisation. Faire

$$\sigma_k^+ \leq \min \{ \rho \sigma_k, r_k \}, \quad s_k = r_k, \quad \lambda_{k+1} = \lambda_k \quad \text{et} \quad i_{k+1} = i_k.$$

4. Choisir une matrice  $H_k$  telle que  $\text{In}(J(w_k, \sigma_k^+)) = (n, m, 0)$ .

5. Calculer l'itéré de Newton  $w_k^+$  en résolvant le système linéaire

$$J(w_k, \sigma_k^+)(w_k^+ - w_k) = -F(w_k, \lambda_{k+1}, \sigma_k^+). \quad (3.2.2)$$

6. Choisir  $\varepsilon_k > 0$  tel que  $\{\varepsilon_k\} \rightarrow 0$ . Si

$$\|F(w_k^+, \lambda_{k+1}, \sigma_k^+)\| \leq \varepsilon_k, \quad (3.2.3)$$

alors faire  $w_{k+1} = w_k^+$  et  $\sigma_{k+1} = \sigma_k^+$ . Sinon, choisir un point initial  $w_k^0$  et appliquer une suite d'itérations internes avec une estimation du multiplicateur de Lagrange  $\lambda_{k+1}$  qui est fixée pour identifier  $w_{k+1}$  et  $\sigma_{k+1} \in [\sigma_k^+, s_k]$  tels que

$$\|F(w_{k+1}, \lambda_{k+1}, \sigma_{k+1})\| \leq \varepsilon_k. \quad (3.2.4)$$


---

Les règles de mise à jour des paramètres  $\sigma_k^+$  et  $\lambda_{k+1}$  sont ajoutées aux étapes 2 et 3 de l'algorithme 3.1. L'exécution de chaque étape dépend du progrès réalisé par l'itéré actuel vers la faisabilité primale. Ce progrès est mesuré par l'inégalité (3.2.1). Si cette dernière est satisfaite, alors l'itéré courant  $x_k$  a réalisé un progrès suffisant vers la faisabilité primale. Dans ce cas, l'estimation du multiplicateur de Lagrange  $\lambda_{k+1}$  est mise à jour avec la valeur  $y_k$ . Cette règle de mise à jour implique que la direction de Newton  $w_k^+ - w_k$ , calculée à l'étape 5 de l'algorithme 3.1, vérifie l'équation

$$\begin{pmatrix} H_k & \nabla g(x_k) \\ \nabla g(x_k)^\top & -\sigma_k^+ I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k^+ - x_k \\ y_k^+ - y_k \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla_x \mathcal{L}(w_k) \\ g(x_k) \end{pmatrix}, \quad (3.2.5)$$

ce qui correspond au système linéaire obtenu en appliquant une méthode de Newton régularisée aux conditions d'optimalité du problème  $(P_E)$ . Dans ce système, le paramètre  $\sigma_k^+$  joue le rôle d'un terme de régularisation. En effet, lorsque la matrice jacobienne des contraintes n'est pas de plein rang, la matrice

$$\begin{pmatrix} H_k & \nabla g(x_k) \\ \nabla g(x_k)^\top & 0 \end{pmatrix},$$

obtenue en linéarisant les conditions d'optimalité du problème  $(P_E)$ , est singulière. Revenons maintenant au deuxième cas de la mise à jour de  $\sigma_k^+$  et  $\lambda_{k+1}$ . Lorsque la condition (3.2.1) n'est pas satisfaite, l'estimation du multiplicateur de Lagrange reste constante et le paramètre de pénalisation est diminué. Pour tout  $k \geq 1$ ,  $i_k$  correspond à l'indice de la dernière itération au cours de laquelle l'instruction  $\lambda_{k+1} = y_k$  a été exécutée. En particulier, nous avons  $\lambda_k = y_{i_k}$  pour tout indice  $k \in \mathbb{N}$ . La suite  $\{i_k\}$  joue un rôle très important dans l'analyse de convergence globale (Lemme 3.3.1 et Théorème 3.3.2) et asymptotique (Lemme 3.4.1) de la méthode proposée.

En ce qui concerne la mise à jour du paramètre de pénalisation, deux stratégies sont implicitement incluses dans la description de notre algorithme. La première est de réduire le paramètre de pénalisation à chaque itération afin que la suite  $\{\sigma_k\}$  converge vers zéro, une condition nécessaire pour obtenir un taux de convergence quadratique de l'algorithme. Puisque le paramètre de pénalisation est autorisé à augmenter au cours des itérations internes, les suites  $\{s_k\}$  et  $\{r_k\}$  sont utilisées pour forcer la convergence de  $\{\sigma_k\}$  vers zéro. La deuxième stratégie consiste à garder le paramètre de pénalisation constant à l'étape 2, comme dans les méthodes de lagrangien augmenté classiques. En effet, si on choisit  $\sigma_k^+ = \sigma_k$  à l'étape 2 et si l'étape 3 n'est exécutée qu'un nombre fini de fois, alors on a  $s_k = \sigma_k^+$  pour tout  $k$  suffisamment grand et par conséquent l'étape 5 implique que  $\sigma_{k+1} = \sigma_k$  pour tout  $k$  suffisamment grand. Dans ce cas, seulement un taux de convergence au plus linéaire est attendu. Notons que la convergence globale de l'algorithme 3.1 est garantie, quel que soit la stratégie utilisée pour choisir le paramètre de pénalisation. Le lemme suivant joue un rôle très important pour démontrer la convergence globale.

**Lemme 3.2.1.** *Si l'étape 3 de l'algorithme 3.1 est exécutée une infinité de fois, alors la suite  $\{\sigma_k\}$  converge vers zéro.*

**Preuve.** Soit  $\mathcal{K} = \{k_0, k_1, k_2, \dots\}$  l'ensemble des indices des itérations au cours de lesquelles l'étape 3 est exécutée. Soit  $i \in \mathbb{N}$ . Les choix de  $s_k$  à l'étape 3 et de  $\sigma_{k+1}$  à l'étape 6 impliquent que  $\sigma_{k_i+1} \leq r_{k_i}$ . Les choix de  $s_k$  à l'étape 2 et  $\sigma_{k+1}$  à l'étape 6 et le fait que  $\sigma_k^+ \leq \sigma_k$  impliquent que pour tout  $1 \leq j \leq k_{i+1} - k_i - 1$ , on a

$$\begin{aligned} \sigma_{k_i+j+1} &\leq \max\{\sigma_{k_i+j}, r_{k_i+j}\} \\ &\leq \max\{\sigma_{k_i+1}, r_{k_i+1}, \dots, r_{k_i+j}\} \\ &\leq \max\{r_{k_i}, r_{k_i+1}, \dots, r_{k_i+j}\}. \end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\max\{\sigma_{k+1} : k_i \leq k < k_{i+1}\} \leq \max\{r_k : k_i \leq k < k_{i+1}\}.$$

La convergence de la suite  $\{r_k\}$  vers zéro implique que le membre droit de cette inégalité converge vers zéro lorsque  $i$  tend vers l'infini et par conséquent toute la suite  $\{\sigma_k\}$  converge vers zéro.  $\square$

### 3.2.2 Itération interne

Lorsque le progrès dans la résolution des conditions (3.1.2) est insuffisant, une suite d'itérations internes est appliquée. Au cours de ces itérations, l'estimation du multiplicateur de Lagrange  $\lambda$  est fixée, le paramètre de pénalisation est autorisé à augmenter et une méthode de type Newton globalisée par une technique de recherche linéaire est appliquée au système (3.1.2) pour trouver  $w_{k+1}$  et  $\sigma_{k+1}$  vérifiant (3.2.4). À chaque itération de cet algorithme, un système linéaire dont la structure est analogue à celle du (3.1.3) est résolu. Une correction de l'inertie de la matrice du système linéaire est effectuée au besoin afin de garantir que la solution est une direction de descente de la fonction primale-duale suivante

$$\Theta_{\lambda,\sigma}(w) = \varphi_{\lambda,\sigma}(x) + \nu\psi_{\lambda,\sigma}(w) \quad \text{où} \quad \psi_{\lambda,\sigma}(w) = \frac{1}{2\sigma}\|g(x) + \sigma(\lambda - y)\|^2, \quad (3.2.6)$$

où  $\nu > 0$ . L'introduction de cette fonction de mérite est due à Robinson [104] et Gill et Robinson [70]. Elle peut être obtenue en appliquant la fonction de Forsgren et Gill [61] au problème initial ( $P_E$ ) dans lequel les contraintes sont décalées par un vecteur constant (voir [71, Section 2]). Il est clair qu'une paire  $(x, y)$  est un point stationnaire de la fonction  $\Theta_{\lambda,\sigma}$  si et seulement si  $F(w, \lambda, \sigma) = 0$ . Par conséquent, trouver un point  $w$  vérifiant les conditions (3.1.2) peut se faire en minimisant la fonction  $\Theta_{\lambda,\sigma}$ . Lorsque le paramètre de pénalisation  $\sigma$  devient petit, la minimisation de  $\Theta_{\lambda,\sigma}$  devient mal conditionnée, ce qui peut influencer sur la longueur des itérations internes. Pour faire face à cette difficulté, nous proposons d'augmenter la valeur du paramètre de pénalisation au cours des itérations internes. Cette procédure a été proposée dans le chapitre précédent et les tests numériques ont montré son efficacité. Elle peut être facilement étendue à ce cadre d'étude. Le principe de cette stratégie consiste à mettre à jour le paramètre de pénalisation  $\sigma$  en prenant le minimum de la fonction convexe  $\sigma \mapsto \frac{1}{\sigma}\|g(x) + \sigma(\lambda - y)\|^2$ , à savoir  $\hat{\sigma} = \|g(x)\|/\|\lambda - y\|$ . Si ce minimum est plus grand que la valeur actuelle de  $\sigma$ , alors nous faisons  $\sigma = \hat{\sigma}$ . Dans ce cas, nous avons  $\Theta_{\lambda,\hat{\sigma}}(w) \leq \Theta_{\lambda,\sigma}(w)$  et donc la convergence globale est garantie. Pour éviter que la suite des paramètres de pénalisation devienne non bornée, une valeur maximale admissible  $\bar{\sigma} \leq s_k$  est définie au début de chaque itération interne.

Soit  $k$  l'indice de l'itération externe au cours de laquelle l'algorithme des itérations internes est appelé. Pour simplifier les notations, l'indice  $k$  sera omis et les itérés générés par l'algorithme 3.2 seront notés par  $w^i := (x^i, y^i)$ . L'algorithme est initialisé avec un point  $w^0$ , un paramètre de pénalisation  $\sigma^0 \in [\sigma^+, \bar{\sigma}]$  et deux constantes  $\omega \in ]0, 1[$  et  $\kappa \in ]0, \frac{1}{2}]$ . Le compteur des itérations internes est initialisé à  $i = 0$ .

Nous donnons maintenant un résultat concernant la décroissance de la fonction de mérite qui sera utile pour analyser la convergence globale des itérations internes. Ce résultat se démontre de la même manière que [11, Proposition 2].

**Proposition 3.2.1.** *Pour toutes les itérations internes  $i \geq 1$ , nous avons*

$$\sigma^{i-1} \leq \sigma^i \leq \bar{\sigma} \quad \text{et} \quad \Theta_{\lambda,\sigma^i}(w^i) \leq \Theta_{\lambda,\sigma^{i-1}}(w^i) \leq \Theta_{\lambda,\sigma^{i-1}}(w^{i-1}).$$

Lorsque l'algorithme 3.2 est appelé par l'algorithme des itérations externes, il devrait s'arrêter avec une paire  $(w^{i+1}, \sigma^i)$  vérifiant le test d'arrêt  $\|F(w^{i+1}, \lambda, \sigma^i)\| \leq \varepsilon_k$ . La valeur de la paire  $(w^{i+1}, \sigma^i)$  est ensuite affectée à la paire  $(w_{k+1}, \sigma_{k+1})$ , qui est le point de départ d'une nouvelle itération externe.

### 3.2. Description de l'algorithme

---

#### Algorithme 3.2 Itération interne

---

1. Pour  $i \geq 1$ . Si  $\lambda - y^i \neq 0$ , alors calculer  $\hat{\sigma}^i = \|g(x^i)\|/\|\lambda - y^i\|$ , sinon faire  $\hat{\sigma}^i = +\infty$ .  
Faire

$$\sigma^i = \begin{cases} \max\{\hat{\sigma}^i, \sigma^{i-1}\} & \text{si } \hat{\sigma}^i \leq \bar{\sigma}, \\ \sigma^{i-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Choisir une matrice  $H^i$  telle que  $\text{In}(J(w^i, \sigma^i)) = (n, m, 0)$ .
3. Calculer la direction  $d^i$  en résolvant le système linéaire

$$J(w^i, \sigma^i)d = -F(w^i, \lambda, \sigma^i). \quad (3.2.7)$$

4. Faire  $\alpha = 1$ . Tant que la condition

$$\Theta_{\lambda, \sigma^i}(w^i + \alpha^i d^i) \leq \Theta_{\lambda, \sigma^i}(w^i) + \omega \alpha^i \nabla \Theta_{\lambda, \sigma^i}(w^i)^\top d^i \quad (3.2.8)$$

n'est pas satisfaite, choisir un nouveau pas  $\alpha^i \in [\kappa \alpha^i, (1 - \kappa) \alpha^i]$ .

5. Faire  $w^{i+1} = w^i + \alpha^i d^i$ .
- 

La proposition suivante donne la formule de la dérivée directionnelle de la fonction de mérite et les conditions sous lesquelles la solution du système linéaire (3.2.7) est une direction de descente de  $\Theta_{\lambda, \sigma}$ .

**Proposition 3.2.2.** *Soit  $d = (d_x, d_y)$  une solution du système linéaire (3.2.7), alors*

$$\nabla \Theta_{\lambda, \sigma}(w)^\top d = -d_x^\top K(w, \sigma) d_x - \frac{\nu}{\sigma} \|\nabla g(x)^\top d_x - \sigma d_y\|^2, \quad (3.2.9)$$

où  $K(w, \sigma) := H + \frac{1}{\sigma} \nabla g(x) \nabla g(x)^\top$ . En plus, si  $K(w, \sigma)$  est définie positive et si  $F(w, \lambda, \sigma)$  est non nulle, alors la solution du système linéaire (3.2.7) est une direction de descente de la fonction de mérite (3.2.6).

**Preuve.** La dérivée directionnelle de  $\Theta_{\lambda, \sigma}$  est donnée par

$$\nabla \Theta_{\lambda, \sigma}(w)^\top d = \nabla \varphi_{\lambda, \sigma}(x)^\top d_x + \nu \nabla \psi_{\lambda, \sigma}(w)^\top d.$$

Nous avons

$$\nabla \varphi_{\lambda, \sigma}(x)^\top d_x = \nabla f(x)^\top d_x + \lambda^\top \nabla g(x)^\top d_x + \frac{1}{\sigma} g(x)^\top \nabla g(x)^\top d_x. \quad (3.2.10)$$

En utilisant la formule (3.2.7), nous obtenons les relations

$$H d_x + \nabla g(x) d_y = -\nabla f(x) - \nabla g(x) y, \quad (3.2.11)$$

$$\nabla g(x)^\top d_x - \sigma d_y = -g(x) - \sigma(\lambda - y). \quad (3.2.12)$$

La relation (3.2.11) nous donne

$$\nabla f(x)^\top d_x = -d_x^\top H d_x - (y + d_y)^\top \nabla g(x)^\top d_x.$$

En substituant ceci dans (3.2.10) et en utilisant (3.2.12), nous obtenons

$$\nabla\varphi_{\lambda,\sigma}(x)^\top d_x = -d_x^\top (H + \frac{1}{\sigma}\nabla g(x)\nabla g(x)^\top) d_x. \quad (3.2.13)$$

Nous calculons maintenant la dérivée directionnelle de  $\psi_{\lambda,\sigma}$ . Nous avons

$$\begin{aligned} \nabla\psi_{\lambda,\sigma}(w)^\top d &= \frac{1}{\sigma}(g(x) + \sigma(\lambda - y))^\top \nabla g(x)^\top d_x + \frac{1}{\sigma}(g(x) + \sigma(\lambda - y))^\top (-\sigma d_y) \\ &= \frac{1}{\sigma}(g(x) + \sigma(\lambda - y))^\top (\nabla g(x)^\top d_x - \sigma d_y) \\ &= -\frac{1}{\sigma}\|\nabla g(x)^\top d_x - \sigma d_y\|^2. \end{aligned}$$

La dernière égalité est obtenue en utilisant (3.2.12). La preuve de (3.2.9) est terminée.

Étant donné que  $K(w, \sigma)$  est définie positive, nous déduisons que  $\nabla\Theta_{\lambda,\sigma}(w)^\top d \leq 0$ . Cette dérivée est égale à zéro si et seulement si  $d_x = 0$  et  $\nabla g(x)^\top d_x - \sigma d_y = 0$ . En utilisant ceci, (3.2.11) et (3.2.12), nous concluons que  $d_y = 0$ , ce qui implique que  $F(w, \lambda, \sigma) = 0$ , à partir de (3.2.7).  $\square$

### 3.3 Analyse de convergence globale

Après avoir donné une description détaillée de notre algorithme primal-dual, nous analysons dans cette section sa convergence globale. Nous commençons par l'analyse de convergence de l'algorithme des itérations internes et nous terminons avec celle de l'algorithme des itérations externes. Tout au long de cette section, il est supposé que les fonctions  $f$  et  $g$  sont continûment différentiables sur  $\mathbb{R}^n$ .

#### 3.3.1 Itérations internes

Pour étudier sa convergence globale, nous supposons que l'algorithme 3.2 génère une suite infinie  $\{w^i\}$ . Le résultat de cette partie est obtenu sous les hypothèses suivantes.

**Hypothèse 3.3.1.** *Les suites  $\{\nabla g(x^i)\}$  et  $\{H^i\}$  sont bornées.*

**Hypothèse 3.3.2.** *Les matrices  $K(w^i, \sigma^i)$  sont uniformément définies positives pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , c'est à dire il existe une constante  $\beta > 0$  telle que pour tout  $i \in \mathbb{N}$  et pour tout  $u \in \mathbb{R}^n$ ,*

$$u^\top K(w^i, \sigma^i)u \geq \beta\|u\|^2. \quad (3.3.1)$$

L'hypothèse 3.3.2 peut être obtenue par un simple mécanisme de contrôle d'inertie de la matrice

$$J^i := J(w^i, \sigma^i) = \begin{pmatrix} H^i & \nabla g(x^i) \\ \nabla g(x^i)^\top & -\sigma^i I \end{pmatrix}.$$

En effet, la matrice  $K(w^i, \sigma^i) = H^i + \frac{1}{\sigma^i}\nabla g(x^i)\nabla g(x^i)^\top$  est définie positive si et seulement si la matrice  $J^i$  a une inertie égale à  $(n, m, 0)$  (voir Lemme 1.3.3).

Le théorème suivant montre que l'algorithme 3.2 réussit à chaque fois appelé par l'algorithme 3.1 à trouver une paire  $(w_{k+1}, \sigma_{k+1})$  qui satisfait le test d'arrêt (3.2.4), à

condition que la fonction objectif soit bornée inférieurement. La preuve de ce théorème suit la même démarche que celle du [11, Théorème 1] avec des modifications surtout au niveau des parties 2 et 3. Pour des raisons de complétude, nous donnons le théorème et détaillons entièrement la preuve.

**Théorème 3.3.1.** *Sous les hypothèses 3.3.1-3.3.2, une des deux situations suivantes se produit.*

- i) *L'algorithme 3.2 converge dans le sens où  $\liminf \|F(w^i, \lambda, \sigma^i)\| = 0$ .*
- ii) *La suite des valeurs de la fonction objectif  $\{f(x^i)\}$  tend vers  $-\infty$ .*

**Preuve.** Le raisonnement est par contradiction. Supposons qu'aucune des deux situations (i) et (ii) n'est vraie.

La bornitude de la suite  $\{J^i\}$  découle directement de l'hypothèse 3.3.1 et du fait que la suite  $\{\sigma^i\}$  est bornée supérieurement par  $\bar{\sigma}$ . En utilisant l'équation (3.2.7) et le fait que  $\liminf \|F(w^i, \lambda, \sigma^i)\| > 0$ , nous obtenons  $\liminf \|d^i\| > 0$ , ce qui implique l'existence d'un nombre  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $i \in \mathbb{N}$

$$\|d^i\| \geq \varepsilon. \quad (3.3.2)$$

Le reste de la preuve est divisé en trois parties.

**Partie 1.** Nous montrons en premier lieu qu'il existe  $\bar{\beta} > 0$  tel que pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,

$$-\nabla \Theta_{\lambda, \sigma^i}(w^i)^\top d^i \geq \bar{\beta} \|d^i\|^2. \quad (3.3.3)$$

Supposons que cette conclusion n'est pas vraie. Alors, pour tout  $k \geq 1$ , il existe  $j_k \in \mathbb{N}$  tel que

$$-\nabla \Theta_{\lambda, \sigma^{j_k}}(w^{j_k})^\top d^{j_k} < \frac{1}{k} \|d^{j_k}\|^2.$$

En particulier, nous avons  $d^{j_k} \neq 0$  pour tout  $k \geq 1$ . En utilisant la proposition 3.2.2 et l'hypothèse 3.3.2, nous déduisons que pour tout  $k \geq 1$

$$\beta \|u_x^k\|^2 + \frac{\nu}{\sigma^{j_k}} \|\nabla g(x^{j_k})^\top u_x^k - \sigma^{j_k} u_y^k\|^2 < \frac{1}{k},$$

où  $u^k := \frac{d^{j_k}}{\|d^{j_k}\|}$  est un vecteur unitaire. En prenant une sous-suite si nécessaire, nous pouvons supposer que la suite  $\{u^k\}$  converge vers un vecteur unitaire  $u := (u_x, u_y)$ . En prenant la limite lorsque  $k \rightarrow \infty$  dans la dernière inégalité, nous obtenons

$$u_x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma^{j_k}} \|\nabla g(x^{j_k})^\top u_x^k - \sigma^{j_k} u_y^k\|^2 = 0.$$

En utilisant le fait que la suite  $\{\sigma^{j_k}\}$  est bornée inférieurement par  $\sigma^0$  et que  $\{\nabla g(x^{j_k})\}$  est bornée, nous obtenons  $u_y = 0$  et donc  $u = 0$ , ce qui contredit  $\|u\| = 1$ . La conclusion (3.3.3) est donc démontrée.

**Partie 2.** Nous montrons maintenant que la suite  $\{w^i\}$  converge vers un point noté  $\bar{w} := (\bar{x}, \bar{y})$  et que la suite  $\{\alpha^i\}$  converge vers zéro. Soit  $i \in \mathbb{N}$ . La condition d'Armijo (3.2.8) peut être écrite comme suit

$$-\omega \alpha^i \nabla \Theta_{\lambda, \sigma^i}(w^i)^\top d^i \leq \Theta_{\lambda, \sigma^i}(w^i) - \Theta_{\lambda, \sigma^i}(w^{i+1}).$$

D'après la proposition 3.2.1, nous avons encore  $\Theta_{\lambda, \sigma^{i+1}}(w^{i+1}) \leq \Theta_{\lambda, \sigma^i}(w^{i+1})$ , ce qui implique que

$$-\omega \alpha^i \nabla \Theta_{\lambda, \sigma^i}(w^i)^\top d^i \leq \Theta_{\lambda, \sigma^i}(w^i) - \Theta_{\lambda, \sigma^{i+1}}(w^{i+1}).$$

En utilisant les inégalités (3.3.2) et (3.3.3) et le fait que  $w^{i+1} - w^i = \alpha^i d^i$ , nous avons

$$\varepsilon \bar{\beta} \omega \|w^{i+1} - w^i\| \leq \Theta_{\lambda, \sigma^i}(w^i) - \Theta_{\lambda, \sigma^{i+1}}(w^{i+1}).$$

En sommant ces inégalités pour  $i$  de 0 à un entier arbitraire  $p$ , nous obtenons

$$\varepsilon \bar{\beta} \omega \sum_{i=0}^p \|w^{i+1} - w^i\| \leq \Theta_{\lambda, \sigma^0}(w^0) - \Theta_{\lambda, \sigma^{p+1}}(w^{p+1}). \quad (3.3.4)$$

Or,

$$\begin{aligned} \Theta_{\lambda, \sigma}(w) &= f(x) + \lambda^\top g(x) + \frac{1}{2\sigma} \|g(x)\|^2 + \frac{1}{2\sigma} \|g(x) + \sigma(\lambda - y)\|^2 \\ &= f(x) + \frac{1}{2\sigma} \|g(x) + \sigma\lambda\|^2 - \frac{\sigma}{2} \|\lambda\|^2 + \frac{1}{2\sigma} \|g(x) + \sigma(\lambda - y)\|^2 \\ &\geq f(x) - \frac{\sigma}{2} \|\lambda\|^2. \end{aligned}$$

En substituant cette inégalité dans (3.3.4), nous obtenons

$$\varepsilon \bar{\beta} \omega \sum_{i=0}^p \|w^{i+1} - w^i\| \leq \Theta_{\lambda, \sigma^0}(w^0) - f(x^{p+1}) + \frac{\sigma^{p+1}}{2} \|\lambda\|^2.$$

En rappelant que la situation (ii) échoue et que  $\lambda$  est fixée au cours des itérations internes et en utilisant la bornitude du paramètre de pénalisation, nous concluons que la série  $\sum (w^{i+1} - w^i)$  est absolument convergente. Il s'en suit que la suite  $\{w^i\}$  converge vers le point  $\bar{w}$ . Enfin, la convergence de la suite  $\{\alpha^i\}$  vers zéro découle de l'inégalité  $\|w^{i+1} - w^i\| = \alpha^i \|d^i\| \geq \alpha^i \varepsilon$ .

**Partie 3.** Cette partie de la preuve est consacrée à la mise en évidence de la contradiction. La convergence de la suite  $\{\alpha^i\}$  vers zéro implique que  $\alpha^i < 1$ , pour tout  $i$  suffisamment grand. Pour un tel indice  $i$ , il existe une longueur de pas  $\bar{\alpha}^i > 0$  tel que  $\alpha^i \in [\kappa \bar{\alpha}^i, (1 - \kappa) \bar{\alpha}^i]$  pour laquelle la condition (3.2.8) n'est pas satisfaite, c'est à dire

$$\Theta_{\lambda, \sigma^i}(\bar{w}^i) > \Theta_{\lambda, \sigma^i}(w^i) + \omega \bar{\alpha}^i \nabla \Theta_{\lambda, \sigma^i}(w^i)^\top d^i, \quad (3.3.5)$$

où  $\bar{w}^i := w^i + \bar{\alpha}^i d^i$ . Pour  $i$  suffisamment grand, nous avons  $\|w^{i+1} - w^i\| = \alpha^i \|d^i\| \geq \kappa \|\bar{\alpha}^i d^i\|$ , ce qui implique que la suite  $\{\bar{\alpha}^i d^i\}$  converge vers zéro et par conséquent la suite  $\{\bar{w}^i\}$  converge vers  $\bar{w}$ .

### 3.3. Analyse de convergence globale

Soit  $i$  suffisamment grand tel que l'inégalité (3.3.5) est vraie. En utilisant le théorème de la valeur moyenne, il existe un point  $\tilde{w}^i$  appartenant au segment  $[w^i, \bar{w}^i]$  tel que

$$\Theta_{\lambda, \sigma^i}(\tilde{w}^i) - \Theta_{\lambda, \sigma^i}(w^i) = \bar{\alpha}^i \nabla \Theta_{\lambda, \sigma^i}(\tilde{w}^i)^\top d^i.$$

En substituant cette égalité dans (3.3.5), en appliquant l'inégalité de Cauchy Schwartz et enfin en utilisant l'inégalité (3.3.3), nous obtenons

$$\|\nabla \Theta_{\lambda, \sigma^i}(\tilde{w}^i) - \nabla \Theta_{\lambda, \sigma^i}(w^i)\| > (1 - \omega) \bar{\beta} \|d^i\|. \quad (3.3.6)$$

Soient  $h_1(w) := f(x) + ((1 + \nu)\lambda - \nu y)^\top g(x)$ ,  $h_2(w) := \frac{\nu}{2} \|\lambda - y\|^2$  et  $h_3(w) := \frac{1+\nu}{2} \|g(x)\|^2$ . En utilisant la définition de la fonction de mérite (3.2.6), nous avons  $\Theta_{\lambda, \sigma^i} = h_1 + \sigma^i h_2 + \frac{1}{\sigma^i} h_3$ . En utilisant (3.3.6), l'inégalité triangulaire et le fait que  $\sigma^i \in [\sigma^0, \bar{\sigma}]$ , nous avons

$$(1 + \bar{\sigma} + \frac{1}{\sigma^0}) \max \{ \|\nabla h_k(\tilde{w}^i) - \nabla h_k(w^i)\| : k \in \{1, 2, 3\} \} > (1 - \omega) \bar{\beta} \|d^i\|.$$

La continuité des fonctions  $\nabla h_1$ ,  $\nabla h_2$  et  $\nabla h_3$  en  $\bar{w}$  implique que le membre gauche de l'inégalité tend vers zéro, quand  $i$  tend vers l'infini. Par conséquent la suite  $\{d^i\}$  converge vers zéro, ce qui est en contradiction avec (3.3.2). La preuve est terminée.  $\square$

#### 3.3.2 Itérations externes

Dans cette sous-section, nous considérons la convergence globale de l'algorithme 3.1. Le resultat sera donné après avoir énoncé et démontré le lemme suivant.

**Lemme 3.3.1.** *Soient  $\{\gamma_k\}$  une suite de nombres positifs ou nuls qui converge vers zéro,  $\ell \in \mathbb{N}$ ,  $a \in ]0, 1[$  et  $\mathcal{K}$  est un ensemble infini de nombres positifs ou nuls. Supposons que  $\{\beta_k\}$  est une suite de nombres positifs définie par*

$$\beta_{k+1} \leq a \max \{ \beta_i : (k - \ell)^+ \leq i \leq k \} + \gamma_k \quad \text{pour tout } k \in \mathcal{K}, \quad (3.3.7)$$

$$\beta_{k+1} = \beta_k \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N} \setminus \mathcal{K}. \quad (3.3.8)$$

Alors, la suite  $\{\beta_k\}$  converge vers zéro.

**Preuve.** Nous considérons tout d'abord le cas  $\mathcal{K} = \mathbb{N}$ . Alors, la suite  $\{\beta_k\}$  satisfait

$$\beta_{k+1} \leq a \max \{ \beta_i : (k - \ell)^+ \leq i \leq k \} + \gamma_k, \quad (3.3.9)$$

pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . La preuve de cette partie se base sur celle de [11, Proposition 1]. Soit  $\bar{\gamma} := \sup \{ \gamma_k : k \in \mathbb{N} \}$  et  $\beta := \max \{ \beta_0, \bar{\gamma} / (1 - a) \}$ . Nous commençons par démontrer par récurrence sur  $k \in \mathbb{N}$  que  $\beta_k \leq \beta$ . Le cas de base est trivialement vrai. Pour  $k \in \mathbb{N}$  donné, supposons que  $\beta_i \leq \beta$  pour tout  $0 \leq i \leq k$ . Alors,  $\beta_{k+1} \leq a\beta + \bar{\gamma}$  et donc  $\beta_{k+1} \leq \beta$ . Par conséquent, la limite supérieure de la suite  $\{\beta_k\}$  est finie. En prenant la limite supérieure dans l'inégalité (3.3.9), nous obtenons l'inégalité

$$\limsup \beta_k \leq a \limsup \beta_k,$$

à partir de laquelle nous déduisons que  $\limsup \beta_k = 0$  et par conséquent  $\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = 0$ .



Considérons maintenant le cas où  $\mathcal{K} \subsetneq \mathbb{N}$ . Soit  $\mathcal{K} = \{k_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  où  $k_i < k_{i+1}$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$ . Nous commençons par démontrer qu'on a pour tout  $i \in \mathbb{N}$

$$\beta_{k_{i+1}} \leq a \max \{\beta_j : (k_i - \ell)^+ \leq j \leq k_i\} + \gamma_{k_i}. \quad (3.3.10)$$

Puisque  $k_i \in \mathcal{K}$ , l'inégalité (3.3.7) est vraie pour  $k = k_i$ . Si  $k_i + 1 \in \mathcal{K}$ , alors on a  $k_{i+1} = k_i + 1$  et l'inégalité (3.3.10) est trivialement vraie. Si  $k_i + 1 \notin \mathcal{K}$ , alors on a

$$\beta_{k_{i+1}} = \beta_{k_{i+1}-1} = \dots = \beta_{k_i+1} \leq a \max \{\beta_j : (k_i - \ell)^+ \leq j \leq k_i\} + \gamma_{k_i},$$

ce qui prouve (3.3.10). Montrons maintenant que

$$\max \{\beta_j : (k_i - \ell)^+ \leq j \leq k_i\} \leq \max \{\beta_j : k_{(i-\ell)^+} \leq j \leq k_i\}. \quad (3.3.11)$$

Si  $\ell \leq i$ , alors  $(i - \ell)^+ = i - \ell$  et puisque  $i \leq k_i$ , nous avons encore  $(k_i - \ell)^+ = k_i - \ell$ . Dans ce cas, l'inégalité (3.3.11) découle du fait que  $k_{i-\ell} \leq k_i - \ell$ . Dans l'autre cas, on a  $\ell > i$  ce qui implique que  $k_{(i-\ell)^+} = k_0$ . Par définition de  $\mathcal{K}$ , on a  $\beta_k = \beta_{k_0}$  pour tout  $0 \leq k < k_0$ . Il découle de ce qui précède que

$$\max \{\beta_j : (k_i - \ell)^+ \leq j \leq k_i\} \leq \max \{\beta_j : 0 \leq j \leq k_i\} = \max \{\beta_j : k_0 \leq j \leq k_i\},$$

ce qui termine la preuve de (3.3.11). En rappelant que les termes de la suite  $\{\beta_k\}$  sont constants entre deux itérations successives indexées dans l'ensemble  $\mathcal{K}$ , c'est à dire que  $\beta_k = \beta_{k_j}$  pour tout  $j \geq 1$  et  $k_{j-1} < k \leq k_j$ , on obtient

$$\max \{\beta_j : k_{(i-\ell)^+} \leq j \leq k_i\} = \max \{\beta_{k_j} : (i - \ell)^+ \leq j \leq i\}.$$

En combinant cette égalité et les inégalités (3.3.10) et (3.3.11), on obtient

$$\beta_{k_{i+1}} \leq a \max \{\beta_{k_j} : (i - \ell)^+ \leq j \leq i\} + \gamma_{k_i}. \quad (3.3.12)$$

En définissant  $\beta'_i := \beta_{k_i}$  et  $\gamma'_i := \gamma_{k_i}$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , l'inégalité (3.3.12) s'écrit

$$\beta'_{i+1} \leq a \max \{\beta'_j : (i - \ell)^+ \leq j \leq i\} + \gamma'_i.$$

En appliquant la première partie de la preuve, cette dernière inégalité implique que la suite  $\{\beta'_i\}$  converge vers zéro et par suite la suite  $\{\beta_k\}_{k \in \mathcal{K}}$  converge vers zéro. Finalement, la convergence de toute la suite  $\{\beta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  vers zéro est garantie par (3.3.8).  $\square$

Nous sommes maintenant prêt à énoncer le résultat de convergence globale de l'algorithme 3.1. Il est supposé implicitement que l'algorithme des itérations internes réussit, à chaque fois appelé, à trouver une paire  $(w_{k+1}, \sigma_{k+1})$  vérifiant (3.2.4). D'après le théorème 3.3.1, cette hypothèse est satisfaite lorsque la fonction objectif est bornée inférieurement.

**Théorème 3.3.2.** *Supposons que l'algorithme 3.1 génère une suite infinie  $\{w_k\}$ . Alors, les suites  $\{\nabla \mathcal{L}(w_k)\}$  et  $\{g(x_k) + \sigma_k(\lambda_k - y_k)\}$  convergent vers zéro. En plus, si nous supposons que la suite  $\{(\nabla f(x_k), \nabla g(x_k))\}$  soit bornée, alors les itérés primaux approchent la faisabilité primale dans le sens où zéro est un point limite de la suite  $\{g(x_k)\}$  ou bien ils approchent la stationnarité de la mesure d'infaisabilité  $x \mapsto \|g(x_k)\|$ , c'est à dire  $\{\nabla g(x_k)g(x_k)\}$  tend vers zéro. En outre, un des deux résultats suivants s'applique.*

(i) La suite  $\{y_k\}$  est non bornée. Alors, la suite des paramètres de pénalisation  $\{\sigma_k\}$  converge vers zéro et la suite des itérés primaux approche l'échec de la condition de qualification LICQ, i.e. il existe une suite de vecteurs unitaires  $\{u_k\}$  telle que

$$\liminf \|\nabla g(x_k)u_k\| = 0. \quad (3.3.13)$$

(ii) La suite  $\{y_k\}$  est bornée. Alors, la suite des itérés primaux est asymptotiquement réalisable, i.e.

$$\lim g(x_k) = 0. \quad (3.3.14)$$

**Preuve.** La convergence des suites  $\{\nabla \mathcal{L}(w_k)\}$  et  $\{g(x_k) + \sigma_k(\lambda_k - y_k)\}$  découlent de l'étape 6 de l'algorithme 3.1. Supposons maintenant que la suite  $\{(\nabla f(x_k), \nabla g(x_k))\}$  soit bornée. Pour montrer la deuxième partie de l'affirmation, nous distinguons les deux cas suivants.

*Cas 1.* L'étape 2 est exécutée une infinité de fois. Soit  $\mathcal{K}$  l'ensemble des indices des itérations au cours de lesquelles l'étape 2 est exécutée. Par hypothèse,  $\mathcal{K}$  est de dimension infinie. Soit  $k \in \mathcal{K}$ . Alors, on a

$$\|g(x_k)\| \leq a \max \{\eta_{i_j} : (k - \ell)^+ \leq j \leq k\} \quad \text{et} \quad i_{k+1} = k.$$

En utilisant ceci et la définition de  $\eta_k$  à l'étape 1 de l'algorithme 3.1, on obtient

$$\begin{aligned} \eta_{i_{k+1}} &= \eta_k = \|g(x_k)\| + \zeta_k \\ &\leq a \max \{\eta_{i_j} : (k - \ell)^+ \leq j \leq k\} + \zeta_k. \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

Lorsque  $k \notin \mathcal{K}$ , on a

$$\eta_{i_{k+1}} = \eta_{i_k}. \quad (3.3.16)$$

En appliquant maintenant le lemme 3.3.1 à la suite  $\{\eta_{i_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  définie par les relations (3.3.15) et (3.3.16), nous concluons que  $\{\eta_{i_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers zéro. Ceci implique qu'il existe une sous-suite de  $\{g(x_k)\}$  qui converge vers zéro.

*Cas 2.* L'étape 2 est exécutée un nombre fini de fois. Dans ce cas, il existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tel que l'étape 3 est exécutée à chaque itération  $k \geq k_0$ . Ceci implique que  $\lambda_k = \lambda_{k_0}$  pour tout  $k \geq k_0$ . De plus, le lemme 3.2.1 implique que la suite  $\{\sigma_k\}$  converge vers zéro. Soit  $k \geq k_0$ . On a

$$\begin{aligned} \nabla g(x_k)g(x_k) &= \sigma_k(\nabla f(x_k) + \nabla g(x_k)y_k) - \sigma_k \nabla f(x_k) \\ &\quad + \nabla g(x_k)(g(x_k) + \sigma_k(\lambda_{k_0} - y_k)) - \nabla g(x_k)(\sigma_k \lambda_{k_0}). \end{aligned}$$

En prenant la norme des deux côtés, on obtient

$$\begin{aligned} \|\nabla g(x_k)g(x_k)\| &\leq \sigma_k \|\nabla \mathcal{L}(w_k)\| + \sigma_k \|\nabla f(x_k)\| + \|\nabla g(x_k)\| \|g(x_k) + \sigma_k(\lambda_{k_0} - y_k)\| \\ &\quad + \|\nabla g(x_k)\| \|\sigma_k \lambda_{k_0}\|. \end{aligned}$$

En utilisant cette inégalité, la bornitude de  $\{(\nabla f(x_k), \nabla g(x_k))\}$  et la convergence vers zéro des suites  $\{\sigma_k\}$ ,  $\{\nabla \mathcal{L}(w_k)\}$  et  $\{g(x_k) + \sigma_k(\lambda_k - y_k)\}$ , on obtient  $\lim \|\nabla g(x_k)g(x_k)\| = 0$ .

Passons maintenant à la preuve du résultat (i). Supposons qu'il existe  $\mathcal{K} \subset \mathbb{N}$  tel que la sous-suite  $\{\|y_k\|\}_{k \in \mathcal{K}}$  tend vers l'infini. Soit  $k \in \mathcal{K}$  et définissons  $u_k := \frac{y_k}{\|y_k\|}$ . Nous avons l'inégalité suivante

$$\|\nabla g(x_k)u_k\| \leq \frac{1}{\|y_k\|} (\|\nabla \mathcal{L}(w_k)\| + \|\nabla f(x_k)\|).$$

En utilisant cette inégalité, la convergence de  $\{\nabla \mathcal{L}(w_k)\}$  vers zéro et la bornitude de  $\{\nabla f(x_k)\}$ , on obtient (3.3.13).

Finalement, pour démontrer (ii), nous distinguons de nouveau deux cas.

*Cas 1.* L'étape 3 est exécutée une infinité de fois. Dans ce cas, le lemme 3.2.1 implique que la suite  $\{\sigma_k\}$  converge vers zéro. D'autre part, on a

$$\|g(x_k)\| \leq \|g(x_k) + \sigma_k(\lambda_k - y_k)\| + \sigma_k(\|\lambda_k\| + \|y_k\|),$$

Le résultat (3.3.14) est donc obtenu en utilisant cette inégalité, la bornitude de la suite  $\{y_k\}$  et le fait que  $\lambda_{k+1} = y_k$  ou  $\lambda_{k+1} = \lambda_k$ .

*Cas 2.* L'étape 3 n'est exécutée qu'un nombre fini de fois. Dans ce cas, il existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tel que l'étape 2 est exécutée à chaque itération  $k \geq k_0$ . Ceci implique que  $i_k = k - 1$  pour tout  $k > k_0$ . Choisissons  $k_1 > k_0$  tel que  $(k_1 - l)^+ > k_0$ . Soit  $k \geq k_1$ . Nous avons

$$\begin{aligned} \|g(x_k)\| &\leq a \max \{\eta_{i_j} : (k - \ell)^+ \leq j \leq k\} \\ &= a \max \{\eta_{j-1} : (k - \ell)^+ \leq j \leq k\} \\ &= a \max \{\|g(x_{j-1})\| + \zeta_{j-1} : (k - \ell)^+ \leq j \leq k\} \\ &\leq a \max \{\|g(x_{j-1})\| : (k - \ell)^+ \leq j \leq k\} + a \max \{\zeta_{j-1} : (k - \ell)^+ \leq j \leq k\}. \end{aligned}$$

La convergence de la suite  $\{g(x_k)\}$  vers zéro est donc obtenue en appliquant le lemme 3.3.1. Ceci complète la preuve du théorème.  $\square$

On peut noter que la convergence globale de l'algorithme 3.1 n'est pas affectée par le choix de  $\sigma_k^+$  à l'étape 2. Nous terminons cette étude de convergence par un théorème qui analyse le comportement de toute la suite  $\{w_k\}$  générée par l'algorithme 3.1 incluant celle générée par l'algorithme 3.2.

**Théorème 3.3.3.** *Supposons que la suite  $\{x_k\}$  reste dans un ensemble compact, que la suite  $\{H_k\}$  est bornée et que les matrices  $K(w_k, \sigma_k)$  sont uniformément définies positives pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Alors, les deux situations suivantes se produisent :*

- (i) *Si le problème  $(P_E)$  est non réalisable, alors tout point limite  $\bar{x}$  de la suite  $\{x_k\}$  est un point stationnaire de la mesure d'infaisabilité, c'est à dire  $\nabla g(\bar{x})g(\bar{x}) = 0$ ,  $\{y_k\}$  est non bornée et  $\{\sigma_k\}$  tend vers zéro.*
- (ii) *Si le problème  $(P_E)$  est réalisable, alors ou bien la suite  $\{y_k\}$  est non bornée et  $\{x_k\}$  a un point limite  $\bar{x}$  tel que la matrice  $\nabla g(\bar{x})$  n'est pas de plein rang, ou bien la suite  $\{y_k\}$  est bornée et  $\{w_k\}$  vérifie les conditions d'optimalité du problème  $(P_E)$ .*

**Preuve.** Les hypothèses du théorème 3.3.3 impliquent que le théorème 3.3.1 s'applique, ce qui implique que l'algorithme 3.2 termine après un nombre fini d'itérations lorsqu'il est appelé par l'algorithme 3.1.

Si le problème  $(P_E)$  est non réalisable, le théorème 3.3.2 implique que  $\{\nabla g(x_k)g(x_k)\}$  tend vers zéro. Par conséquent, tout point limite  $\bar{x}$  de  $\{x_k\}$  vérifie  $\nabla g(\bar{x})g(\bar{x}) = 0$ . Le résultat (iii) du théorème 3.3.2 implique que la suite  $\{y_k\}$  est non bornée et que la suite  $\{\sigma_k\}$  converge vers zéro.

Supposons que le problème  $(P_E)$  est réalisable. Si  $\{y_k\}$  est non bornée, alors le résultat (iii) du théorème 3.3.2 implique qu'au moins un point limite  $\bar{x}$  de  $\{x_k\}$  est tel la matrice  $\nabla g(\bar{x})$  n'est pas de plein rang. Si  $\{y_k\}$  est borné, alors tout point limite  $\bar{w}$  de la suite  $\{w_k\}$  vérifie  $F_0(\bar{w}) = 0$ .  $\square$

## 3.4 Convergence asymptotique

Dans cette section, nous supposons que l'algorithme 3.1 génère une suite convergente  $\{w_k\}$  vers une solution primale-duale  $w^* := (x^*, y^*)$  de  $(P_E)$ . Notre analyse de convergence asymptotique demande que les hypothèses standards suivantes soient satisfaites à la solution.

**Hypothèse 3.4.1.** *Les fonctions  $f$  et  $c$  sont deux fois continûment différentiables dans un voisinage de  $x^*$  et leur dérivées secondes sont continûment lipschitziennes.*

**Hypothèse 3.4.2.** *L'hypothèse LICQ est satisfaite en  $x^*$ .*

**Hypothèse 3.4.3.** *L'hypothèse SOSC est satisfaite en  $w^*$ .*

Comme nous l'avons déjà présentée dans la première section de ce chapitre, la principale motivation de la proposition de l'algorithme 3.1 est d'améliorer le taux de convergence de la méthode primale-duale développée dans le chapitre précédent. C'est pourquoi, nous avons besoin d'hypothèses supplémentaires sur le choix des suites  $\{\sigma_k^+\}$ ,  $\{\zeta_k\}$  et  $\{r_k\}$  ainsi que le choix de la matrice  $H_k$ . En particulier, le choix de  $\{\sigma_k^+\}$  doit garantir la convergence de  $\{\sigma_k\}$  vers zéro et la matrice  $H_k$  doit être suffisamment proche de la matrice hessienne du lagrangien lorsque les itérés  $w_k$  appartiennent à un voisinage de la solution.

**Hypothèse 3.4.4.** *Il existe  $\gamma > 0$  tel que pour tout  $k \in \mathbb{N}$  suffisamment grand*

$$\|\nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(w_k) - H_k\| \leq \gamma \sigma_k^+.$$

**Hypothèse 3.4.5.** *La suite  $\{\sigma_k^+\}$  est choisie telle que  $\sigma_k^+ = \Theta(\|F_0(w_k)\|)$ .*

**Hypothèse 3.4.6.** *La suite  $\{r_k\}$  est choisie telle que  $r_k = O(\|F_0(w_k)\|)$ .*

**Hypothèse 3.4.7.** *La suite  $\{\zeta_k\}$  est choisie telle que  $\zeta_k = \Omega(\sigma_k)$ .*

L'hypothèse 3.4.6 est utilisée pour démontrer la convergence superlinéaire de la suite  $\{w_k\}$ . L'hypothèse 3.4.7 est nécessaire pour démontrer que l'étape 2 est exécutée à chaque itération pour tout  $k$  suffisamment grand. En utilisant ceci et le fait que  $\sigma_k^+$  est choisi tel que l'hypothèse 3.4.5 est satisfaite, nous montrons que la suite  $\{w_k\}$  converge quadratiquement vers la solution. Dans la section 3.5, nous donnons les choix des suites  $\{\sigma_k^+\}$ ,  $\{r_k\}$  et  $\{\zeta_k\}$  qui vérifient les hypothèses 3.4.5-3.4.7. Le premier lemme de cette section est une conséquence de la convergence de la suite  $\{w_k\}$  vers  $w^*$ .

**Lemme 3.4.1.** *La suite  $\{\lambda_k\}$  converge vers  $y^*$ .*

**Preuve.** Si l'étape 2 est exécutée une infinité de fois, alors le résultat découle des règles de mise à jour de  $\lambda_{k+1}$  aux étapes 2 et 3 de l'algorithme 3.1 et du fait que la suite  $\{w_k\}$  converge vers  $w^*$ . Supposons maintenant que l'étape 2 n'est exécutée qu'un nombre fini de fois. Dans ce cas, l'étape 3 est exécutée à chaque itération pour tout  $k$  suffisamment grand. Soit  $k_0$  l'indice de la dernière itération au cours de laquelle l'étape 2 est exécutée. Nous avons donc  $i_k = k_0$  pour tout  $k > k_0$ . Par suite, à chaque itération  $k > k_0 + l$ , nous avons

$$\max \{ \eta_{i_j} : (k - \ell)^+ \leq j \leq k \} = \eta_{i_k} = \eta_{k_0}.$$

D'autre part, la convergence de  $\{g(x_k)\}$  vers 0 implique qu'il existe un entier  $k_1 > k_0 + \ell$  tel que  $\|g(x_k)\| \leq a \eta_{k_0}$  pour tout  $k \geq k_1$ , ce qui est impossible puisque cela impliquerait que l'étape 2 est de nouveau exécutée. Par conséquent, l'étape 2 doit être exécutée une infinité de fois et donc la suite  $\{\lambda_k\}$  converge vers  $y^*$ .  $\square$

**Lemme 3.4.2.** *Supposons que les hypothèses 3.4.1-3.4.5 soient vérifiées et que  $k$  est suffisamment grand. Alors, il existe  $\delta > 0$ ,  $\bar{\sigma} > 0$ ,  $L_2 > L_1 > 0$ ,  $L_3 > 0$  et  $M > 0$  tels que pour tout  $w_k, w'_k \in \mathcal{B}(w^*, \delta)$  et  $\sigma_k^+ \in ]-\bar{\sigma}, \bar{\sigma}[$ , on a*

- (i)  $L_1 \|w_k - w'_k\| \leq \|F_0(w_k) - F_0(w'_k)\| \leq L_2 \|w_k - w'_k\|$ ,
- (ii)  $\|F'_0(w_k) - F'_0(w'_k)\| \leq L_3 \|w_k - w'_k\|$ ,
- (iii)  $\|J(w_k, \sigma_k^+)^{-1}\| \leq 2M$ .

**Preuve.** Les hypothèses 3.4.2 et 3.4.3 impliquent que la matrice  $F'_0(w^*)$  est inversible et que

$$\|F'_0(w_k)^{-1}\| \leq M,$$

pour une constante positive  $M$ . Ceci implique que le résultat (i) est satisfait (voir, par exemple [48, Théorème 4.1.16]). Le résultat (ii) découle de l'hypothèse 3.4.1 et le fait que la matrice  $F'_0$  a un nombre fini de composantes. Passons maintenant à la preuve du dernier résultat. Notons tout d'abord que nous avons

$$\begin{aligned} \|J(w_k, \sigma_k^+) - F'_0(w^*)\| &\leq \|J(w_k, \sigma_k^+) - F'_0(w_k)\| + \|F'_0(w_k) - F'_0(w^*)\| \\ &\leq \|H_k - \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(w_k)\| + \sigma_k^+ + \|F'_0(w_k) - F'_0(w^*)\|. \end{aligned}$$

En utilisant ceci, les hypothèses 3.4.4 et 3.4.5 et le fait que  $\{w_k\}$  converge vers  $w^*$ , nous obtenons

$$\|F'_0(w^*)^{-1}\| \|J(w_k, \sigma_k^+) - F'_0(w^*)\| < \frac{1}{2}.$$

Il s'ensuit du [48, Théorème 3.1.4] que la matrice  $J(w_k, \sigma_k^+)$  est inversible et que

$$\|J(w_k, \sigma_k^+)^{-1}\| \leq 2M.$$

$\square$

Notons ici que la preuve du résultat (iii) du lemme 3.4.2 demande la convergence de  $\{\sigma_k^+\}$  vers zéro. L'hypothèse 3.4.5 a été utilisée dans cette preuve pour satisfaire cette condition. La preuve reste vraie en remplaçant cette hypothèse par tout autre mécanisme qui garantit

### 3.4. Convergence asymptotique

que  $\{\sigma_k^+\}$  converge vers zéro. Cependant, nous avons besoin de l'hypothèse 3.4.5 pour démontrer la convergence quadratique de l'algorithme 3.1.

Le lemme suivant donne une estimation de la distance de l'itéré de Newton à la solution  $w^*$ . Sa preuve est basée sur celle de [13, Lemme 4.11].

**Lemme 3.4.3.** *Sous les hypothèses 3.4.1-3.4.4, les itérés générés par l'algorithme 3.1 vérifient*

$$\|w_k^+ - w^*\| = O(\|w_k - w^*\|^2) + O(\sigma_k^+ \|w_k - w^*\|) + O(\sigma_k^+ \|\lambda_{k+1} - y_k\|).$$

**Preuve.** Soit  $k_0 \in \mathbb{N}$  suffisamment grand tel que pour tout  $k \geq k_0$ ,  $w_k \in \mathcal{B}(w^*, \delta)$  et  $\sigma_k < \bar{\sigma}$ . À partir de l'étape 5 de l'algorithme 3.1, nous avons

$$\begin{aligned} w_k^+ - w^* &= -J(w_k, \sigma_k^+)^{-1} F(w_k, \lambda_{k+1}, \sigma_k^+) - w^* + w_k \\ &= J(w_k, \sigma_k^+)^{-1} (-F(w_k, \lambda_{k+1}, \sigma_k^+) - J(w_k, \sigma_k^+)(w^* - w_k)) \\ &= J(w_k, \sigma_k^+)^{-1} \left( F_0(w^*) - F_0(w_k) - \sigma_k^+ \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_{k+1} - y_k \end{pmatrix} - J(w_k, \sigma_k^+)(w^* - w_k) \right) \\ &= J(w_k, \sigma_k^+)^{-1} \int_0^1 (F'_0(w_k + t(w^* - w_k)) - F'_0(w_k)) (w^* - w_k) dt \\ &\quad + J(w_k, \sigma_k^+)^{-1} (F'_0(w_k) - J(w_k, \sigma_k^+))(w^* - w_k) \\ &\quad - \sigma_k^+ J(w_k, \sigma_k^+)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_{k+1} - y_k \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

En prenant la norme des deux côtés de l'inégalité (3.4.1), en appliquant les résultats (ii) et (iii) du lemme 3.4.2 et enfin en utilisant l'hypothèse 3.4.4, nous obtenons

$$\|w_k^+ - w^*\| \leq ML_3 \|w_k - w^*\|^2 + 2M\sigma_k^+ \max\{\gamma, 1\} \|w_k - w^*\| + 2M\sigma_k^+ \|\lambda_{k+1} - y_k\|,$$

ce qui termine la preuve du lemme.  $\square$

Le théorème suivant montre la convergence superlinéaire de la suite  $\{w_k\}$  vers  $w^*$ .

**Théorème 3.4.1.** *Supposons que les hypothèses 3.4.1-3.4.6 soient vérifiées. Alors, la suite des itérés générés par l'algorithme 3.1 satisfait*

$$\|w_{k+1} - w^*\| = o(\|w_k - w^*\|). \tag{3.4.2}$$

**Preuve.** Nous commençons cette preuve par donner les relations utiles suivantes. L'hypothèse 3.4.5 et le résultat (i) du lemme 3.4.2 implique que

$$\sigma_k^+ = O(\|w_k - w^*\|). \tag{3.4.3}$$

En combinant ceci avec le résultat du lemme 3.4.3, nous obtenons

$$\|w_k^+ - w^*\| = o(\|w_k - w^*\|) \tag{3.4.4}$$

De la même manière, l'hypothèse 3.4.6, la définition de  $s_k$  aux étapes 2 et 3 de l'algorithme 3.1 et la définition de  $\sigma_{k+1}$  à l'étape 5 impliquent que

$$\sigma_{k+1} = O(\|w_k - w^*\|). \tag{3.4.5}$$

Le reste de cette preuve se base sur celle de [13, Lemme 4.13]. Pour montrer (3.4.2), nous distinguons deux cas. Le premier est lorsqu'il n'y a pas d'itérations internes. Donc, nous avons  $w_{k+1} = w_k^+$ . Dans ce cas, le taux de convergence superlinéaire de  $\{w_k\}$  vers  $w^*$  découle de l'équation (3.4.4). Le deuxième cas est lorsque  $w_{k+1}$  est calculé en appliquant une suite d'itérations internes. Nous avons donc  $\|F(w_k^+, \lambda_{k+1}, \sigma_k^+)\| > \varepsilon_k$ . En utilisant cette inégalité et le premier résultat du lemme 3.4.2, nous déduisons que

$$\begin{aligned}
 L_1 \|w_{k+1} - w^*\| &\leq \|F_0(w_{k+1}) - F_0(w^*)\| \\
 &= \|F_0(w_{k+1})\| \\
 &\leq \|F(w_{k+1}, \lambda_{k+1}, \sigma_{k+1})\| + \sigma_{k+1} \|\lambda_{k+1} - y_{k+1}\| \\
 &\leq \varepsilon_k + \sigma_{k+1} \|\lambda_{k+1} - y_{k+1}\| \\
 &< \|F(w_k^+, \lambda_{k+1}, \sigma_k^+)\| + \sigma_{k+1} \|\lambda_{k+1} - y_{k+1}\| \\
 &\leq \|F_0(w_k^+) - F_0(w^*)\| + \sigma_k^+ \|\lambda_{k+1} - y_k^+\| + \sigma_{k+1} \|\lambda_{k+1} - y_{k+1}\| \\
 &\leq L_2 \|w_k^+ - w^*\| + o(\sigma_k^+) + o(\sigma_{k+1}).
 \end{aligned} \tag{3.4.6}$$

La dernière inégalité découle du fait que les suites  $\{y_k\}$ ,  $\{y_k^+\}$  et  $\{\lambda_k\}$  convergent vers  $y^*$ . Le résultat du lemme est obtenu en combinant (3.4.6), (3.4.3) et (3.4.5).  $\square$

Notons ici que le théorème 3.4.1 peut être démontré seulement en supposant que  $\sigma_k^+ = O(\|F_0(w_k)\|)$  au lieu de l'hypothèse plus forte  $\sigma_k^+ = \Theta(\|F_0(w_k)\|)$ . Cependant, cette dernière hypothèse est nécessaire pour démontrer le théorème 3.4.2. Dans ce dernier, nous démontrons que l'algorithme 3.1 se réduit asymptotiquement à la méthode de Newton régularisée appliquée aux conditions d'optimalité du problème ( $P_E$ ) et le taux de convergence est quadratique.

**Théorème 3.4.2.** *Supposons que les hypothèses 3.4.1-3.4.5 soient satisfaites et que la suite  $\{\varepsilon_k\}$  est choisie telle que  $\varepsilon_k = \Omega(\sigma_k^+)$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}$  suffisamment grand, les itérés calculés à l'étape 6 de l'algorithme 3.1 vérifient  $w_{k+1} = w_k^+$  et  $\sigma_{k+1} = \sigma_k^+$ , ce qui implique qu'il n'y a pas d'itérations internes asymptotiquement.*

*Si en plus l'hypothèse 3.4.7 est satisfaite, alors l'instruction  $\lambda_{k+1} = y_k$  sera exécutée à chaque itération pour tout  $k$  suffisamment grand et le taux de convergence de la suite  $\{w_k\}$  vers  $w^*$  est quadratique.*

**Preuve.** L'hypothèse 3.4.5 et le lemme 3.4.2-(i) impliquent que

$$\sigma_k^+ = \Theta(\|w_k - w^*\|). \tag{3.4.7}$$

Ceci implique que la relation (3.4.4) est encore vraie et découle directement du lemme 3.4.3. En utilisant le résultat (i) du lemme 3.4.2, la relation (3.4.4) et le fait que les suites  $\{\lambda_k\}$  et  $\{y_k^+\}$  convergent vers  $y^*$ , nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \|F(w_k^+, \lambda_{k+1}, \sigma_k^+)\| &\leq \|F_0(w_k^+)\| + \sigma_k^+ \|\lambda_{k+1} - y_k^+\| \\
 &= O(\|w_k^+ - w^*\|) + o(\sigma_k^+) \\
 &= o(\|w_k - w^*\|) + o(\sigma_k^+) \\
 &= o(\sigma_k^+) \\
 &\leq \varepsilon_k
 \end{aligned}$$



ce qui termine la preuve du premier résultat du théorème.

Supposons maintenant que l'hypothèse 3.4.7 est satisfaite. Pour la preuve du deuxième résultat du théorème, il suffit de démontrer que  $\|g(x_k)\| \leq a\eta_{i_k}$  pour  $k$  suffisamment grand puisque ceci impliquerait que la condition (3.2.1) est satisfaite. En utilisant les hypothèses 3.4.1 et 3.4.5, le lemme 3.4.2 et le théorème 3.4.1, nous obtenons

$$\begin{aligned}\|g(x_k)\| &= \|g(x_k) - g(x^*)\| \\ &= O(\|w_k - w^*\|) \\ &= o(\|w_{k-1} - w^*\|) \\ &= o(\|F_0(w_{k-1})\|) \\ &= o(\sigma_{k-1}^+).\end{aligned}\tag{3.4.8}$$

D'après la première partie du théorème, nous avons  $\sigma_{k+1} = \sigma_k^+ \leq \sigma_k$  pour tout  $k$  suffisamment grand. De plus, la règle de mise à jour de la suite  $\{i_k\}$  aux étapes 2 et 3 de l'algorithme 3.1 implique que  $i_k < k$ . Ceci donne  $\sigma_{k-1}^+ = \sigma_k \leq \sigma_{i_k}$ . En utilisant ceci, la relation (3.4.8) implique que  $\|g(x_k)\| = o(\sigma_{i_k})$ . En rappelant que  $\eta_k = \|g(x_k)\| + \zeta_k$  et que l'hypothèse 3.4.7 est vérifiée, nous obtenons  $\|g(x_k)\| \leq a\eta_{i_k}$  pour tout  $k$  suffisamment grand. Par conséquent, l'instruction  $\lambda_{k+1} = y_k$  est exécutée à chaque itération et l'algorithme 3.1 se réduit donc à la méthode de Newton régularisée appliquée aux conditions d'optimalité de  $(P_E)$ . En utilisant ceci et le lemme 3.4.1, nous obtenons

$$\|w_{k+1} - w^*\| = O(\|w_k - w^*\|^2),$$

ce qui signifie que la suite  $\{w_k\}$  converge quadratiquement vers la solution  $w^*$ . □

## 3.5 Détails de l'implémentation

La description de l'algorithme 3.1 inclut implicitement deux stratégies de mise à jour du paramètre de pénalisation garantissant toutes les deux la convergence globale, comme démontré dans le théorème 3.3.2. La première stratégie consiste à diminuer le paramètre de pénalisation à chaque itération pour obtenir un taux de convergence élevé. Il a été démontré dans le théorème 3.4.2 qu'il est quadratique. Cette option algorithmique sera appelée SPDOPT-AL<sup>4</sup>. La deuxième stratégie consiste à maintenir le paramètre de pénalisation constant lorsque l'itéré actuel a réalisé un progrès suffisant vers la faisabilité primale, c'est à dire à l'étape 2 de l'algorithme 3.1. Le comportement asymptotique de cette variante n'a pas été étudié, mais un taux de convergence linéaire pourrait être prévu. Cette version sera appelée SPDOPT-AL-LIN. SPDOPT-AL et SPDOPT-AL-LIN sont implémentés en C. Dans ce qui suit, nous donnons les détails de l'implémentation de SPDOPT-AL.

**Initialisation** Les valeurs initiales de  $w_0$  et  $\sigma_0$  ont été choisies de la même manière que la méthode du chapitre précédent. En particulier, le choix de  $w_0$  permet de résoudre les problèmes quadratiques en une seule itération. À l'étape 1 de l'algorithme 3.1, nous avons choisi  $a = 0.9$  et  $\ell = 2$ .

---

4. Strongly Primal-Dual OPTimization - Augmented Lagrangian



**Mise à jour du paramètre de pénalisation** Au début de chaque itération, les suites  $\{\zeta_k\}$  et  $\{r_k\}$  sont déterminées par

$$\zeta_k = 10\sigma_k/a \quad \text{et} \quad r_k = \min\{1/(k+1), 10^4\|F_0(w_k)\|\}.$$

Il est clair que ces choix vérifient les hypothèses 3.4.6 et 3.4.7 de l'analyse asymptotique. Qu'il s'agisse de l'étape 2 ou 3 de l'algorithme 3.1, le paramètre de pénalisation est mis à jour par la formule suivante

$$\sigma_k^+ = \min(\rho\sigma_k, \rho'\|F_0(w_k)\|, r_k), \quad (3.5.1)$$

où  $\rho \in ]0, 1[$  et  $\rho' > 0$ . Cette règle de mise à jour implique que  $\sigma_k^+ = O(\|F_0(w_k)\|)$ . En utilisant ceci et le choix de  $r_k$  et en appliquant ensuite le théorème 3.4.1, nous obtenons un taux de convergence superlinéaire de  $\{w_k\}$  vers  $w^*$ . En utilisant de nouveau le choix (3.5.1), nous déduisons que l'hypothèse 3.4.5 est satisfaite et par conséquent un taux de convergence quadratique de la suite  $\{w_k\}$  est garanti par le théorème 3.4.2. Au cours de nos tests numériques, nous avons trouvé qu'un bon choix est d'utiliser  $\rho = \rho' = 0.2$  à l'étape 2 et  $\rho = \rho' = 0.1$  à l'étape 3. Une borne inférieure a été imposée au paramètre de pénalisation permettant d'éviter les difficultés numériques dues aux petites valeurs de  $\sigma_k$ . Pour cela, nous avons étendu la stratégie décrite dans le chapitre précédent.

**Système linéaire** Pour le choix de la matrice  $H$  dans les systèmes linéaires (3.2.2) et (3.2.7), nous avons conservé la même stratégie utilisée dans le chapitre précédent.

**Itération interne** Pour la tolérance  $\varepsilon_k$  utilisée à l'étape 6 de l'algorithme 3.1 pour mesurer la précision avec laquelle le système d'équations (3.1.2) est résolu, nous avons considéré le choix suivant

$$\varepsilon_k = 0.9 \max\{\|F(w_i, \lambda_i, \sigma_i)\| : (k-4)^+ \leq i \leq k\} + 10\sigma_k, \quad (3.5.2)$$

pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . En utilisant le lemme 3.3.1, il est facile de démontrer la convergence de la suite  $\{\varepsilon_k\}$  vers 0, une condition nécessaire pour garantir la convergence globale de l'algorithme. De plus, il est clair que  $\varepsilon_k = \Omega(\sigma_k^+)$  pour assurer la convergence asymptotique rapide.

Si l'itéré de Newton  $w_k^+$  ne satisfait pas (3.2.3), nous choisissons un point  $w_k^0 = w_k^+$  et nous appliquons l'algorithme 3.2, avec  $\lambda_{k+1}$  fixé, pour trouver  $w_{k+1}$  et éventuellement un nouveau paramètre  $\sigma_{k+1}$  qui satisfont (3.2.4). Le calcul d'un pas  $\alpha$  vérifiant la condition (3.2.8) à l'étape 4 de l'algorithme 3.2 s'effectue en utilisant des interpolations cubiques et quadratiques. Finalement, les constantes utilisées par l'algorithme 3.2 sont données par  $\omega = 0.01$ ,  $\xi = 10^{-4}$  et  $\nu = \sigma_k^+$ .

Avant de donner les résultats de comparaison des différents codes, nous donnons quelques détails sur l'implémentation de SPDOPT-AL-LIN. Cette dernière diffère légèrement de celle de SPDOPT-AL. À l'étape 1 de l'algorithme 3.1, nous avons choisi  $\ell = 0$  et  $r_k = \zeta_k = 1/(k+1)$  pour tout  $k$ . Le paramètre de pénalisation est mis à jour en faisant  $\sigma_k^+ = \sigma_k$  à l'étape 2 et  $\sigma_k^+ = \min\{0.1\sigma_k, r_k\}$  à l'étape 3. À l'étape 5, nous avons fixé  $\varepsilon_0 = 0.5$  et pour tout  $k \geq 1$ ,

$$\varepsilon_k = \max\{\sigma_k \varepsilon_{k-1}, r_k\}.$$

## 3.6 Résultats numériques

Pour évaluer les performances de SPDOPT-AL, nous l'avons comparé à SPDOPT-AL-LIN, SPDOPT-QP<sup>5</sup> (Quadratic Penalty) et deux solveurs d'optimisation bien connus basés sur la méthode de lagrangien augmenté : ALGENCAN [4, 5] et LANCELOT-A [40]. Puisque tous ces algorithmes garantissent la convergence seulement vers un minimum local du problème ( $P_E$ ), il est possible qu'ils convergent vers des solutions différentes. C'est pourquoi, nous excluons de la comparaison les problèmes pour lesquels les valeurs finales des fonctions objectif  $f(x_1^*), \dots, f(x_{ns}^*)$  ne sont pas proches, où  $ns$  est le nombre de solveurs considérés et  $x_i^*$  est la solution obtenue par le  $i$ -ème solveur. Cela peut se faire en éliminant de la comparaison les problèmes pour lesquels

$$\frac{f_{\max}^* - f_{\min}^*}{1 + \max\{|f_{\max}^*|, |f_{\min}^*|\}} > 10^{-1}, \quad (3.6.1)$$

où  $f_{\max}^* = \max\{f(x_1^*), \dots, f(x_{ns}^*)\}$  et  $f_{\min}^* = \min\{f(x_1^*), \dots, f(x_{ns}^*)\}$ . Ici, le maximum et le minimum sont pris seulement sur les valeurs des fonctions objectif pour lesquelles la résolution du problème est terminée avec succès. Cette heuristique a été utilisée dans [118, 121].

Les résultats numériques présentés dans les deux sous-sections suivantes ont été menés sur un MacBook Pro avec un processeur Intel Core i5 à 2.3 GHz et 4 Go de mémoire. Les tableaux des résultats numériques obtenus par chaque solveur sont donnés dans les annexes B, D et E.

### 3.6.1 Comparaison avec SPDOPT-QP

Notre motivation principale pour proposer une nouvelle méthode était d'améliorer celle présentée dans le chapitre précédent. C'est pourquoi, nous commençons par examiner les performances de SPDOPT-AL par rapport à SPDOPT-QP. Ce dernier a été appliqué en utilisant la règle de mise à jour (2.0.9) pour le paramètre de pénalisation. Pour mettre en évidence les avantages du taux de convergence quadratique, nous avons considéré deux choix des paramètres  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$ . Le premier choix est  $\kappa_1 = 0.1$  et  $\kappa_2 = 1.8$  et sera appelé SPDOPT-QP-1 (utilisé dans le chapitre 2). Le deuxième choix est  $\kappa_1 = 0.2$  et  $\kappa_2 = 1.5$  et sera appelé SPDOPT-QP-2.

---

5. Cet algorithme, présenté et analysé dans le chapitre 2, est une version initiale de SPDOPT-AL.

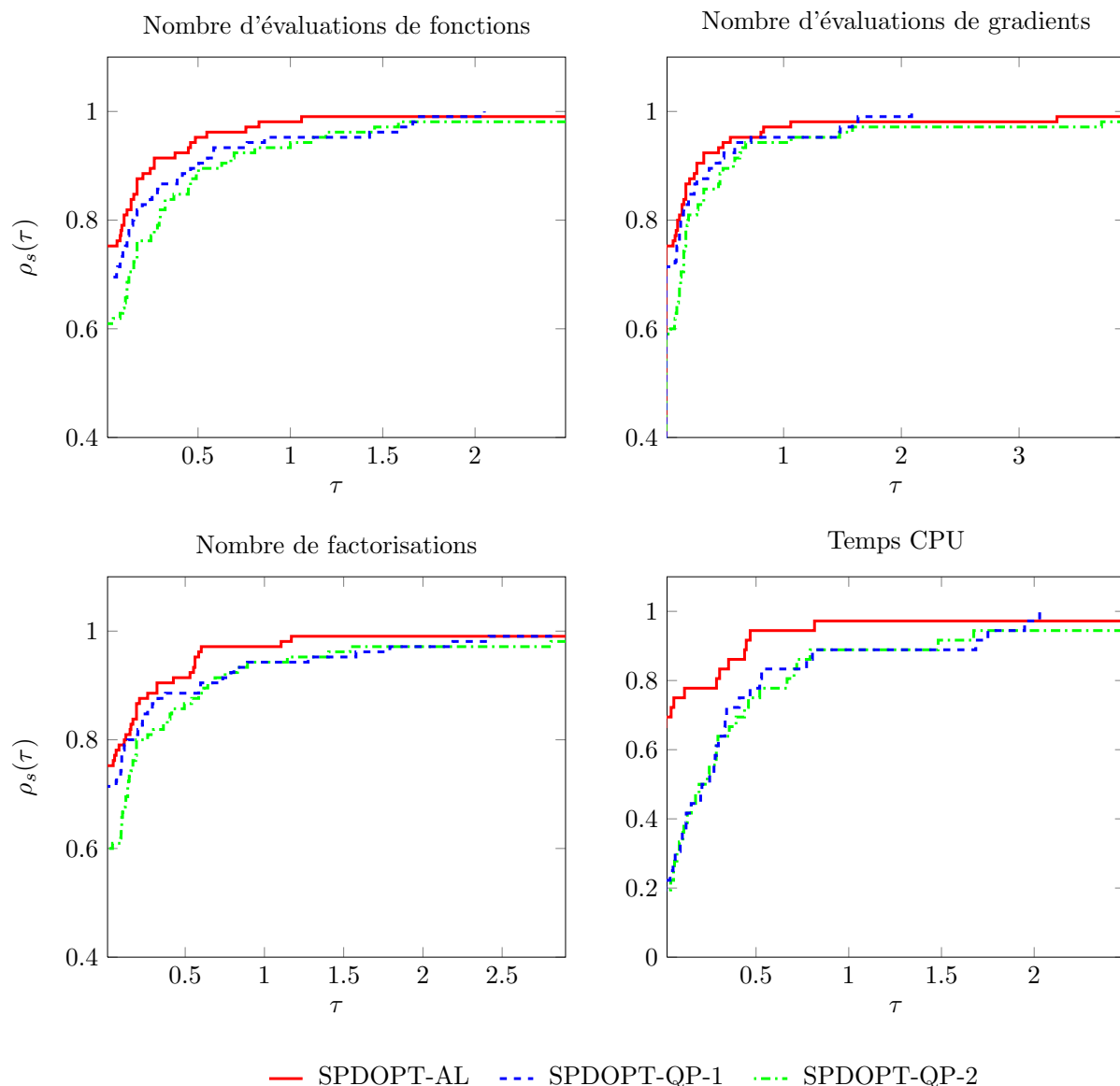


FIGURE 3.1 – Profils de performance de SPDOPT-AL et SPDOPT-QP sur les problèmes standards.

La figure 3.1 résume les performances de SPDOPT-AL et SPDOPT-QP pour la même collection de problèmes utilisée dans le chapitre 2. Comme prévu, SPDOPT-AL semble être plus efficace que SPDOPT-QP. Ceci revient au fait que SPDOPT-AL jouit d'une convergence quadratique alors que celle de SPDOPT-QP est au plus superlinéaire. Cet écart d'efficacité est plus remarquable en considérant le temps CPU. En effet, le taux d'efficacité de SPDOPT-AL est de l'ordre de 70% alors que celui des deux versions de SPDOPT-QP ne dépasse pas 25%. Il faut noter que ce profil a été obtenu en considérant seulement 38 problèmes. En fait, nous avons éliminé les problèmes pour lesquels le temps CPU du solveur le plus rapide est inférieur à 0.05 secondes car une petite différence au niveau des performances du système peut aboutir à une comparaison non objective. Pour justifier ce gain, nous avons comparé le nombre de factorisations<sup>6</sup> effectuées par le solveur

6. Le profil de performance correspondant au nombre de factorisations (et encore le nombre d'évalua-

linéaire MA57 pour SPDOPT-AL et SPDOPT-QP pour résoudre les 38 problèmes. En effet, la factorisation de la matrice du système est la tâche la plus coûteuse en terme de temps CPU. Nous avons obtenu un profil de performance similaire à celui correspondant au temps CPU ce qui justifie la rapidité de SPDOPT-AL. Enfin, SPDOPT-AL semble être un peu plus robuste que SPDOPT-QP-2 et moins robuste que SPDOPT-QP-1. Ce dernier est capable de résoudre 105 problèmes. Alors que SPDOPT-AL et SPDOPT-QP-2 sont capables de résoudre respectivement 104 et 103 problèmes de la collection considérée. Le seul échec de SPDOPT-AL concerne le problème `dixchlng`. Cet échec est dû à une mauvaise estimation du multiplicateur de Lagrange associé aux contraintes d'égalité. La norme infinie de ce dernier dépasse  $10^9$ . En re-exécutant SPDOPT-AL en autorisant la procédure de mise à l'échelle, ce problème est résolu après seulement 10 itérations et 12 évaluations de fonctions et de gradients.

Parmi les 104 problèmes résolus avec succès, SPDOPT-AL a besoin de 1671 itérations, dont 1210 sont des itérations externes. Au cours de 76% de ces dernières, la condition (3.2.1) est satisfaite et par conséquent l'étape 2 a été exécutée et la mise à jour  $\lambda_{k+1} = y_k$  a été utilisée.

Malgré que notre étude théorique a été établie pour les problèmes réguliers, nous pensons qu'il est intéressant d'observer le comportement de SPDOPT-AL pour résoudre les problèmes dégénérés. Ceci est motivé par le fait que la méthode proposée, comme SPDOPT-QP, introduit une régularisation naturelle du système linéaire. La comparaison a été faite sur la même collection de problèmes *dégénérés* utilisée dans le chapitre 2. Dans ce dernier, il a été démontré au moyen d'une comparaison avec IPOPT que SPDOPT-QP-1 jouit d'une bonne performance pour la résolution de ce type de problèmes. La figure 3.2 présente une comparaison des trois méthodes. Comme le montre cette figure, SPDOPT-AL semble bien performer comparativement à SPDOPT-QP-1. Concernant le nombre d'évaluations de fonctions, de gradients et de factorisations, le gain de SPDOPT-AL par rapport à SPDOPT-QP-1 en terme d'efficacité dépasse 25%. Concernant le temps CPU, le gain dépasse 40%. En terme de robustesse, le gain de SPDOPT-AL par rapport à SPDOPT-QP-1 est encore remarquable. Ces profils confirment que la manière avec laquelle le taux de perturbation des contraintes est géré est bien adaptée à ce type de problèmes. En effet, pour SPDOPT-AL, la perturbation des contraintes  $\sigma(\lambda - y)$  est mise à jour dépendamment de la violation des contraintes. Lorsqu'il y'a un progrès dans la résolution du problème, cette perturbation est nulle, au cours des itérations externes, ce qui permet d'avoir une bonne approximation du problème initial. Alors que pour SPDOPT-QP, la perturbation  $\sigma y$  est présente tout au long du processus de la minimisation et est non négligeable pour les problèmes dégénérées ce qui peut augmenter le nombre d'itérations pour résoudre un problème approché de  $(P_E)$  même si l'algorithme se réduit à des itérations externes.

---

tions de fonctions et de gradients) présenté dans la figure 3.1 est obtenu en considérant une collection de 105 problèmes (4 problèmes ont été exclus car ils vérifient la condition (3.6.1)).

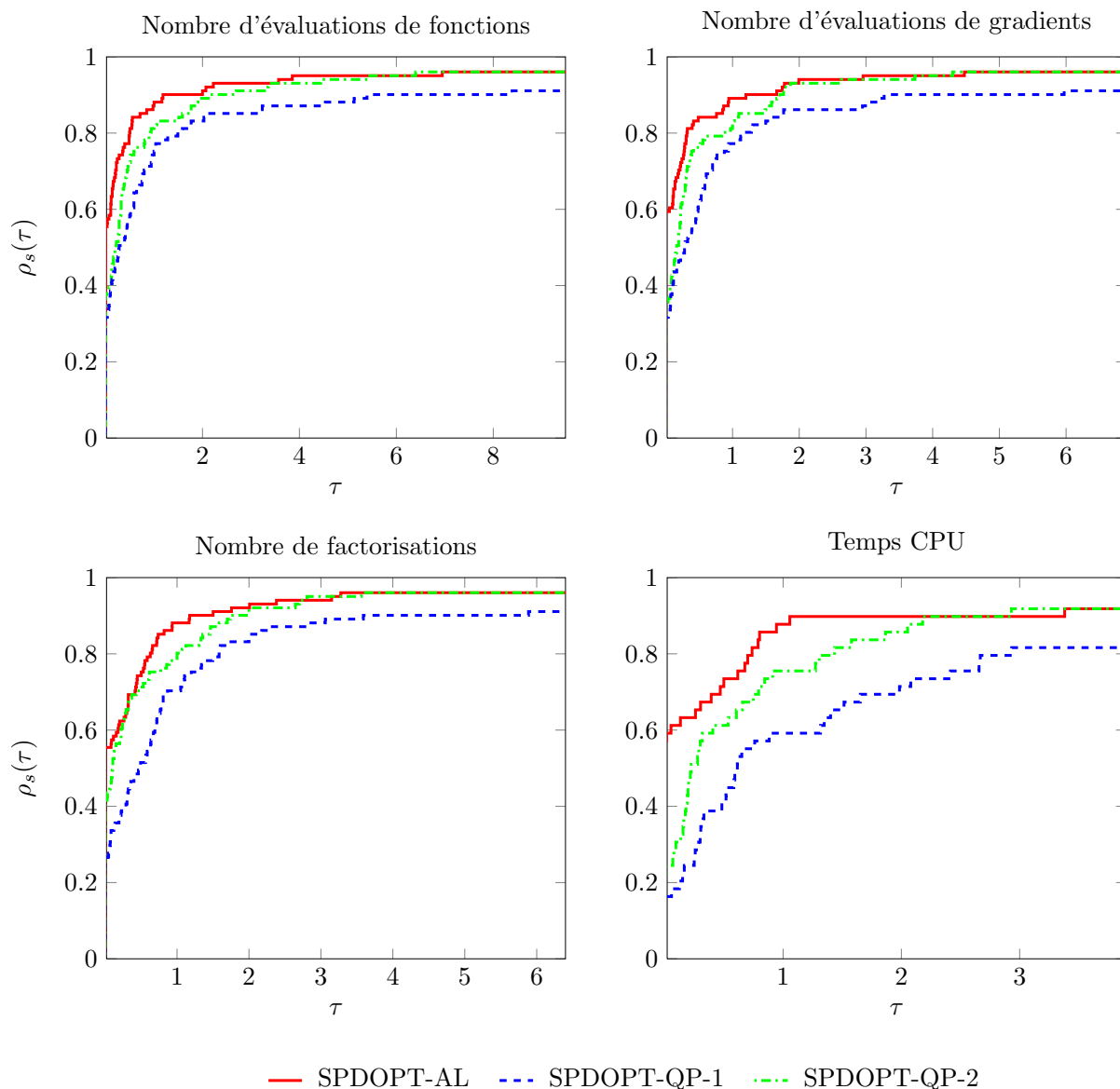


FIGURE 3.2 – Profils de performance de SPDOPT-AL et SPDOPT-QP sur les problèmes dégénérés.

### 3.6.2 Comparaison avec d'autres méthodes de lagrangien augmenté

Pour évaluer la fiabilité du code SPDOPT-AL, nous l'avons comparé à ALGENCAN (version 2.4.0) et LANCELOT-A<sup>7</sup>, deux implémentations basées sur des formulations de lagrangien augmenté. Une description succincte de ces deux méthodes a été donnée dans le paragraphe 1.1.2. Nous utilisons la même collection de problèmes utilisée dans la sous-section précédente mais en excluant le problème `aug2d` pour lequel LANCELOT-A

7. Il y a une version plus récente que LANCELOT-A qui s'appelle LANCELOT-B. Cette dernière version n'a pas d'interface à AMPL. C'est pourquoi, nous nous sommes contentés d'utiliser LANCELOT-A. LANCELOT-B sera utilisé dans le chapitre 4.

termine avec le message d'erreur : *malloc(3265842944) failure : run out of memory*.

La tolérance d'arrêt a été fixée à  $10^{-8}$  pour tous les solveurs. Un nombre maximum de 3000 itérations a été imposé pour chaque problème. De plus, les trois codes ont été exécutés sans aucune procédure de mise à l'échelle. En particulier, LANCELOT-A utilise cette option par défaut. Concernant la résolution du système linéaire, SPDOPT-AL et ALGENCAN utilisent MA57 [53] alors que LANCELOT-A utilise une méthode de gradient conjugué préconditionné<sup>8</sup>. Pour des raisons de complétude, nous donnons le contenu des fichiers d'options de ALGENCAN et LANCELOT-A :

# ALGENCAN	# LANCELOT-A
LINEAR-SYSTEMS-SCALING-AVOIDED	maxit 3000
OBJECTIVE-AND-CONSTRAINTS-SCALING-AVOIDED	ctol 1e-8
ACC-FEASIBILITY-THRESHOLD 1.0d+20	gtol 1e-8
ACC-OPTIMALITY-THRESHOLD 1.0d+20	

La figure 3.3 montre les performances des quatre méthodes sur une collection de problèmes standards. En ce qui concerne le nombre d'évaluations de fonctions, 6 problèmes<sup>9</sup> ont été exclus puisqu'au moins deux méthodes ont trouvé des solutions locales différentes. La figure 3.3 indique que l'efficacité de SPDOPT-AL est remarquable. Le taux d'efficacité est de l'ordre de 92% tandis que celui de ALGENCAN et LANCELOT-A ne dépasse pas 10%. Ce gain d'efficacité est très probablement dû au choix de la tolérance  $\{\varepsilon_k\}$  pour résoudre le problème approché. Le choix dynamique que nous avons utilisé permet de raccourcir le plus possible la longueur d'itérations internes sans affecter la convergence globale et par suite de diminuer le coût du processus de minimisation en terme de nombre d'évaluations de fonctions et de gradients. Cependant, ALGENCAN et LANCELOT-A résolvent à chaque itération un problème approché du problème initial avec des précisions très petites même pendant les premières itérations, ce qui justifie cette perte en efficacité par rapport à SPDOPT-AL. En terme de robustesse, ALGENCAN est le plus robuste puisqu'il est capable de résoudre tous les problèmes, alors que SPDOPT-AL et LANCELOT-A ne résolvent que 101 et 96 problèmes, respectivement.

Concernant le temps CPU, nous avons considéré seulement 34 problèmes pour lesquels le solveur le plus rapide a besoin de plus de 0.05 secondes pour résoudre le problème. Nous remarquons encore que SPDOPT-AL est le plus efficace sur 60% des problèmes.

La figure 3.3 compare encore les performances des deux versions de l'algorithme 3.1, SPDOPT-AL et SPDOPT-AL-LIN. Il est clair que la version quadratique surpasse, comme prévu, la version linéaire en terme d'efficacité. Ce gain est supérieur à 40% et 60% en terme de nombre d'évaluations de fonctions et de temps CPU, respectivement. Cette efficacité remarquable n'a pas été suivie par une perte de robustesse. En fait, les deux versions de l'algorithme 3.1 résolvent tous les problèmes standards considérés sauf un. Notons ici que le seul échec de SPDOPT-AL-LIN est provoquée par le dépassement du nombre maximum d'itérations. La figure 3.3 montre également que le comportement de SPDOPT-AL-LIN se rapproche de celui des méthodes de lagrangien augmenté classiques, mais SPDOPT-AL-LIN reste un peu plus efficace en ce qui concerne le nombre d'évaluations de fonctions.

---

8. Il est connu que l'utilisation de MA57 améliore les performances du solveur considéré. Pour LANCELOT-A, nous n'avons pas pu l'utiliser car la routine MA31 n'est plus maintenue par HSL.

9. Ces problèmes sont *bt07*, *eigenb2*, *hs079*, *lukvle04*, *robot*, *s338*.

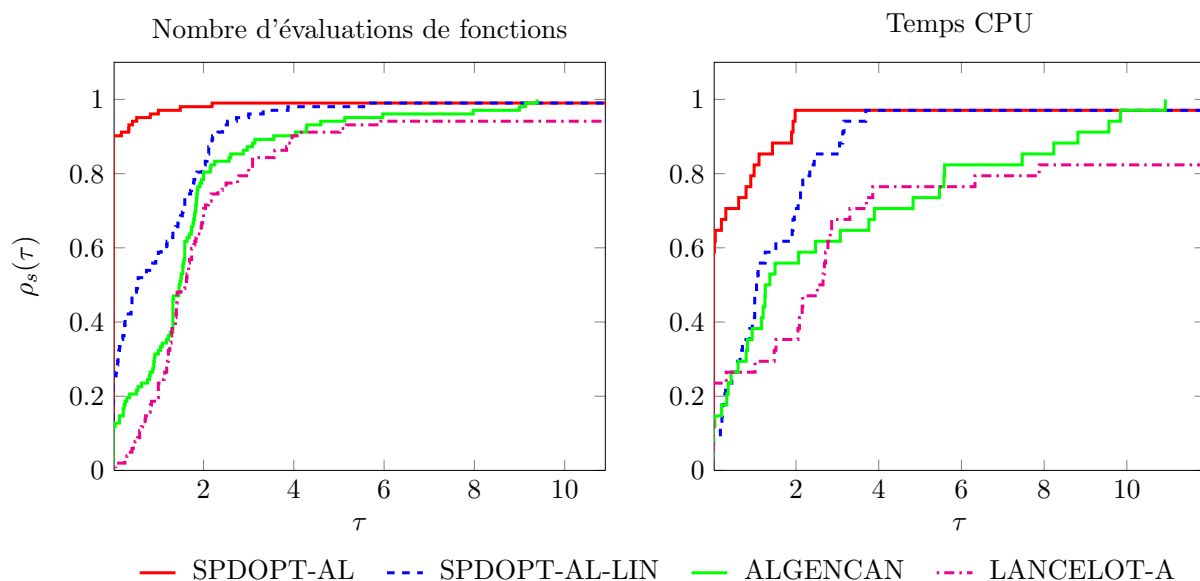


FIGURE 3.3 – Profils de performance de SPDOPT-AL, SPDOPT-AL-LIN, ALGENCAN et LANCELOT-A sur les problèmes standards.

Finalement, la figure 3.4 présente une comparaison des performances des quatre codes sur une collection de problèmes dégénérés. De nouveau, SPDOPT-AL semble être le plus efficace. Concernant ces deux profils, la seule différence comparant à ceux présentés dans la figure 3.3 est que LANCELOT-A est maintenant plus efficace que ALGENCAN pour ce type de problèmes, contrairement à leur taux d'efficacité sur les problèmes standards. En terme de robustesse, ALGENCAN est de nouveau le plus robuste. Il est capable de résoudre tous les problèmes dégénérés. Cependant, SPDOPT-AL et LANCELOT-A résolvent respectivement 97 et 92 des 102 problèmes considérés.

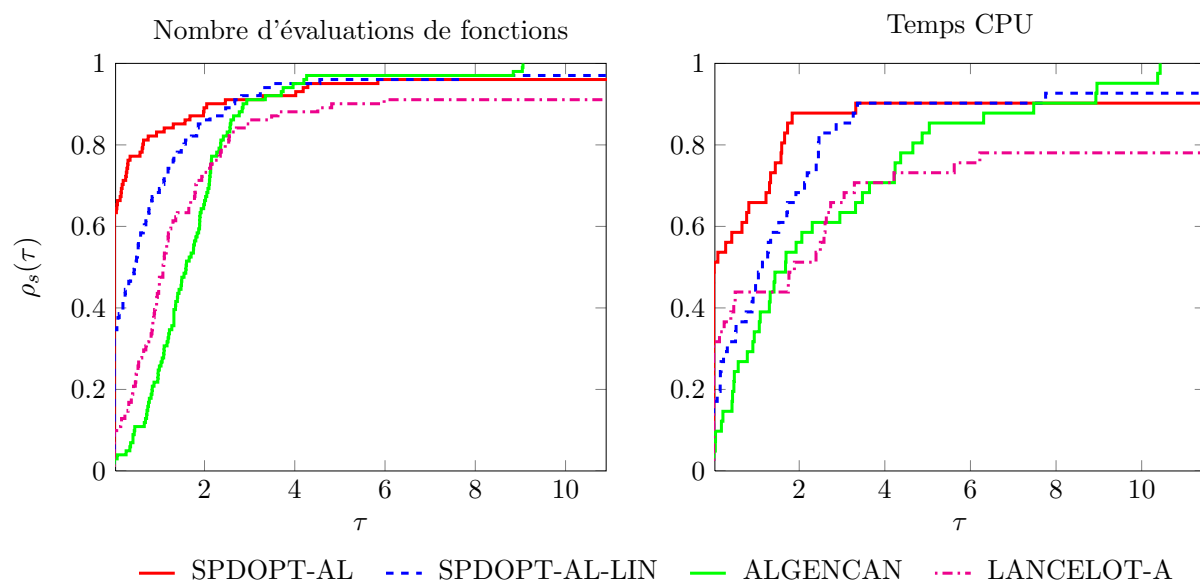


FIGURE 3.4 – Profils de performance de SPDOPT-AL, SPDOPT-AL-LIN, ALGENCAN et LANCELOT-A sur les problèmes dégénérés.

## 3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un nouvel algorithme primal-dual, globalement convergent, pour la résolution des problèmes d'optimisation de la forme  $(P_E)$ . Cet algorithme est basé sur l'application d'une méthode de type Newton aux conditions d'optimalité issues d'une reformulation du problème initial en introduisant un lagrangien augmenté. Ce travail a été essentiellement motivé par celui présenté dans le chapitre 2. En particulier, nous avons voulu améliorer le taux de convergence de SPDOPT-QP et son comportement sur les problèmes dégénérés. Nous pensons que ces objectifs ont été atteints. En effet, le taux de convergence de la nouvelle méthode est quadratique. Le résultat de cette amélioration est remarquable sur l'efficacité de SPDOPT-AL par rapport SPDOPT-QP. Concernant les problèmes dégénérés, la manière avec laquelle le terme de perturbation des contraintes est mis à jour a permis un meilleur comportement de notre nouvelle méthode pour résoudre tels problèmes. De plus, nous avons donné une comparaison avec ALGENCAN et LANCELOT-A sur deux collections de problèmes dont chacune est de dimension 108. Les résultats ont montré que SPDOPT-AL jouit d'une bonne performance surtout de point de vue efficacité.

Notre prochain objectif sera d'étendre ce travail au cas des problèmes d'optimisation de la forme  $(P_{EI})$ . Ce point sera le sujet du chapitre suivant.





# Chapitre 4

## Une méthode de lagrangien augmenté et de points intérieurs primale-duale pour l'optimisation non linéaire<sup>10</sup>

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>54</b>
4.1.1	Schéma général de l'algorithme	57
<b>4.2</b>	<b>Description de l'algorithme</b>	<b>60</b>
4.2.1	Itération externe	60
4.2.2	Itération interne	61
<b>4.3</b>	<b>Analyse de convergence globale</b>	<b>63</b>
4.3.1	Itérations internes	63
4.3.2	Itérations externes	68
<b>4.4</b>	<b>Convergence asymptotique</b>	<b>72</b>
4.4.1	Hypothèses et résultats préliminaires	72
4.4.2	Résultats asymptotiques	75
<b>4.5</b>	<b>Implémentation</b>	<b>81</b>
<b>4.6</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>86</b>
4.6.1	Stratégies de réduction de $\mu$	87
4.6.2	Points de départ des itérations internes	88
4.6.3	Exemple de Wächter et Biegler	89
4.6.4	Collection de Hock et Schittkowski	91
4.6.5	Collection de CUTEst	92
4.6.6	Collection de problèmes dégénérés	94
<b>4.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>96</b>

---

---

10. Ce travail est le sujet de l'article en préparation [15], en collaboration avec P. Armand.

## 4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous proposons une extension de la méthode du chapitre précédent pour la résolution des problèmes d'optimisation non linéaire de la forme

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x) \\ \text{s.c.} \quad & g(x) = 0, \\ & x \geq 0, \end{aligned} \quad (P_{EI})$$

où  $f$  et  $g$  sont des fonctions deux fois différentiables. Les contraintes sont traitées en introduisant un lagrangien augmenté pour les égalités et une fonction barrière logarithmique pour les inégalités. Le problème sans contrainte considéré a donc la forme

$$\min_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x > 0}} \varphi_{\lambda, \sigma, \mu}(x) := f(x) + \lambda^\top g(x) + \frac{1}{2\sigma} \|g(x)\|^2 - \mu \sum_{i=1}^n \log[x]_i, \quad (4.1.1)$$

où  $\sigma > 0$  est le paramètre de pénalisation,  $\mu > 0$  est le paramètre barrière et  $\lambda$  est une estimation du multiplicateur de Lagrange associé aux contraintes d'égalité. Ce choix est motivé par les bonnes performances de la méthode proposée dans le chapitre 3 pour le traitement des contraintes d'égalité et de celle de points intérieurs, utilisée par exemple dans [34, 117, 121, 133], pour le traitement des contraintes d'inégalité. Notons ici que notre méthode utilise deux paramètres de pénalisation distincts,  $\sigma$  et  $\mu$ . Pour toute référence ultérieure, le gradient et la matrice hessienne de  $\varphi_{\lambda, \sigma, \mu}(x)$  sont donnés par

$$\nabla \varphi_{\lambda, \sigma, \mu}(x) = \nabla f(x) + \nabla g(x) \left( \lambda + \frac{1}{\sigma} g(x) \right) - \mu X^{-1} e, \quad (4.1.2)$$

et

$$\nabla^2 \varphi_{\lambda, \sigma, \mu}(x) = \nabla^2 f(x) + \sum_{i=1}^m \left[ \lambda + \frac{1}{\sigma} g(x) \right]_i \nabla^2 g_i(x) + \frac{1}{\sigma} \nabla g(x) \nabla g(x)^\top + \mu X^{-2}.$$

En utilisant la définition (1.3.2) du lagrangien associé au problème  $(P_{EI})$ , la matrice hessienne de  $\varphi_{\lambda, \sigma, \mu}$  s'écrit sous la forme

$$\nabla^2 \varphi_{\lambda, \sigma, \mu}(x) = \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(x, \lambda + \frac{1}{\sigma} g(x), z) + \frac{1}{\sigma} \nabla g(x) \nabla g(x)^\top + \mu X^{-2}. \quad (4.1.3)$$

La fonction objectif du problème (4.1.1) peut être interprétée comme étant le lagrangien augmenté associé au problème barrière suivant :

$$\begin{aligned} \min_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x > 0}} \quad & f(x) - \mu \sum_{i=1}^n \log[x]_i, \\ \text{s.c.} \quad & g(x) = 0. \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

Les conditions d'optimalité de premier ordre de ce problème sont données par

$$\begin{aligned} \nabla f(x) - \mu X^{-1} e + \nabla g(x) y &= 0, \\ g(x) &= 0. \end{aligned}$$

## 4.1. Introduction

En introduisant la variable  $z = \mu X^{-1}e$  et en définissant  $w := (x, y, z)$ , ces conditions peuvent être écrites sous la forme

$$F_0(w) = \mu \tilde{e}, \quad (4.1.5)$$

où  $\tilde{e} = (0, 0, e^\top)^\top$  et la fonction  $F_0$  est définie par (1.3.4). Le théorème suivant donne les liens entre les trois problèmes ( $P_{EI}$ ), (4.1.1) et (4.1.4).

**Théorème 4.1.1.** *Soit  $x^* \in \mathbb{R}^n$  un minimum local du problème ( $P_{EI}$ ). Supposons que les hypothèses LICQ, SOSC et SC soient satisfaites en  $x^*$ . Alors, il existe  $\tilde{\mu} > 0$  tel que pour tout  $\mu \in ]0, \tilde{\mu}[$ , les conditions d'optimalité du premier ordre du problème (4.1.4) ont une solution primale-duale unique  $(x(\mu), y(\mu))$  telle que  $x(\mu) \rightarrow x^*$ ,  $y(\mu) \rightarrow y^*$  et  $\mu X_\mu^{-1}e \rightarrow z^*$  lorsque  $\mu \rightarrow 0$ , où  $(x^*, y^*, z^*)$  est la solution primale-duale qui satisfait les conditions d'optimalité du problème ( $P_{EI}$ ) et  $X_\mu = \text{diag}(x(\mu))$ . De plus, il existe  $\sigma^* > 0$  et  $\mu^* \in ]0, \tilde{\mu}[$  tels que pour tout  $(\sigma, \mu) \in ]0, \sigma^*[\times]0, \mu^*[, x(\mu)$  est un minimum local strict de  $\varphi_{\lambda, \sigma, \mu}(\cdot)$  pour  $\lambda = y(\mu)$ .*

**Preuve.** L'hypothèse LICQ garantit l'existence d'une paire unique  $(y^*, z^*) \in \mathbb{R}^{m+n}$  telle que  $F_0(w^*) = 0$ . De plus, les hypothèses du théorème implique que la matrice jacobienne  $F'_0(w^*)$  est inversible (d'après le théorème 1.3.1). En appliquant le théorème des fonctions implicites, il existe  $\tilde{\mu} > 0$  et une trajectoire  $w(\mu) := (x(\mu), y(\mu), z(\mu))$ , appelée *chemin central* et dont le point limite est  $w^* := (x^*, y^*, z^*)$ , telle que  $F_0(w(\mu)) = \mu \tilde{e}$  pour tout  $\mu \in [0, \tilde{\mu}]$ .

Montrons maintenant qu'il existe  $\sigma^* > 0$  et  $\mu^* \in ]0, \tilde{\mu}[$  tels que pour tout  $(\sigma, \mu) \in ]0, \sigma^*[\times]0, \mu^*[, x(\mu)$  est un minimum local strict de  $\varphi_{y(\mu), \sigma, \mu}(\cdot)$ . Ceci revient à démontrer que pour tout  $\sigma$  et  $\mu$  suffisamment petits, on a

$$\nabla \varphi_{y(\mu), \sigma, \mu}(x(\mu)) = 0 \quad \text{et} \quad \nabla^2 \varphi_{y(\mu), \sigma, \mu}(x(\mu)) \succ 0. \quad (4.1.6)$$

La première partie de (4.1.6) est vraie pour tout  $\sigma > 0$  et  $\mu \in ]0, \tilde{\mu}[$ . En effet, en utilisant la formule (4.1.2) et le fait que  $g(x(\mu)) = 0$  et  $\mu X_\mu^{-1} = Z_\mu$ , où  $Z_\mu = \text{diag}(z(\mu))$ , nous obtenons

$$\nabla \varphi_{y(\mu), \sigma, \mu}(x(\mu)) = \nabla f(x(\mu)) + \nabla g(x(\mu))y(\mu) - z(\mu) = 0.$$

Il nous reste à démontrer qu'il existe  $\sigma^* > 0$  et  $\mu^* \in ]0, \tilde{\mu}[$  tels que pour tout  $(\sigma, \mu) \in ]0, \sigma^*[\times]0, \mu^*[,$  la matrice  $\nabla^2 \varphi_{y(\mu), \sigma, \mu}(x(\mu))$  est définie positive. Supposons le contraire. Alors, pour tout entier  $k > \frac{1}{\tilde{\mu}}$ , il existe  $(\sigma_k, \mu_k) \in ]0, \frac{1}{k}[\times]0, \frac{1}{k}[$  et un vecteur unitaire  $u_k \in \mathbb{R}^n$  tels que

$$u_k^\top \nabla^2 \varphi_{y(\mu_k), \sigma_k, \mu_k}(x(\mu_k)) u_k \leq 0. \quad (4.1.7)$$

En combinant cette inégalité et la relation (4.1.3) et en utilisant  $g(x(\mu_k)) = 0$ , nous obtenons

$$u_k^\top \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(w(\mu_k)) u_k + \frac{1}{\sigma_k} \|\nabla g(x(\mu_k))^\top u_k\|^2 + \mu_k \|X_{\mu_k}^{-1} u_k\|^2 \leq 0. \quad (4.1.8)$$

Sachant que  $\sigma_k < \frac{1}{k}$  et  $\mu_k < \frac{1}{k}$  et rappelant la définition de  $Z_{\mu_k}$ , la relation (4.1.8) donne

$$u_k^\top \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(w(\mu_k)) u_k + k(\|\nabla g(x(\mu_k))^\top u_k\|^2 + \|Z_{\mu_k} u_k\|^2) \leq 0.$$

Puisque la suite  $\{u_k\}$  se trouve dans un ensemble compact, elle admet une sous-suite  $\{u_k\}_{\mathcal{K}}$  qui converge vers un vecteur unitaire  $u^*$ , où  $\mathcal{K} \subset \mathbb{N}$ . En prenant la limite supérieure dans la dernière inégalité, nous obtenons

$$u^{*\top} \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(w^*) u^* + \limsup_{\substack{k \rightarrow \infty \\ k \in \mathcal{K}}} k(\|\nabla g(x(\mu_k))^\top u_k\|^2 + \|Z_{\mu_k} u_k\|^2) \leq 0. \quad (4.1.9)$$

Ceci implique que les sous-suites  $\{\nabla g(x(\mu_k))^\top u_k\}_{\mathcal{K}}$  et  $\{Z_{\mu_k} u_k\}_{\mathcal{K}}$  convergent vers zéro et par conséquent  $\nabla g(x^*)^\top u^* = 0$  et  $Z^* u^* = 0$ , où  $Z^* = \text{diag}(z^*)$ . L'hypothèse de complémentarité stricte implique que  $[u^*]_i = 0$  pour tout  $i$  correspondant à une contrainte de borne active. En utilisant maintenant la SOS, il découle que  $u^{*\top} \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(w^*) u^* > 0$ , ce qui contredit l'inégalité (4.1.9).  $\square$

Il faut remarquer que le deuxième résultat du théorème 4.1.1 n'est pas obtenu par application directe du théorème classique de convergence locale des méthodes de lagrangien augmenté (par exemple [99, Théorème 17.5]). En effet, en appliquant ce dernier au problème (4.1.4), on montre que pour tout  $\mu$  suffisamment petit, il existe  $\sigma_\mu > 0$  tel que pour tout  $\sigma \in ]0, \sigma_\mu]$ ,  $x(\mu)$  est un minimum local strict de  $\varphi_{y(\mu), \sigma, \mu}(\cdot)$ . Le résultat du théorème 4.1.1 est plus fort puisqu'il est vrai pour toute valeur de  $\sigma$  indépendante de  $\mu$ . Ce résultat est à la base de notre algorithme décrit ci-après et de son analyse asymptotique.

Les conditions nécessaires de premier ordre du problème (4.1.1) sont

$$\nabla f(x) + \nabla g(x)(\lambda + \frac{1}{\sigma}g(x)) - \mu X^{-1}e = 0. \quad (4.1.10)$$

En introduisant les variables  $y = \lambda + \frac{1}{\sigma}g(x)$  et  $z = \mu X^{-1}e$ , les conditions (4.1.10) peuvent être écrites sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \nabla_x \mathcal{L}(w) &= 0, \\ g(x) + \sigma(\lambda - y) &= 0, \\ XZe - \mu e &= 0, \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

Ces conditions peuvent être écrites sous la forme simplifiée suivante :

$$F(w, \lambda, \sigma, \mu) = 0, \quad (4.1.12)$$

où  $F : \mathbb{R}^{N+m+2} \rightarrow \mathbb{R}^N$  est définie par

$$F(w, \lambda, \sigma, \mu) = \begin{pmatrix} \nabla_x \mathcal{L}(w) \\ g(x) + \sigma(\lambda - y) \\ XZe - \mu e \end{pmatrix}.$$

Notons ici qu'en utilisant la notation introduite dans (1.3.4), nous obtenons

$$F(w, \lambda, \sigma, \mu) = F_0(w) + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda - y \\ 0 \end{pmatrix} - \mu \tilde{e}. \quad (4.1.13)$$

### 4.1.1 Schéma général de l'algorithme

L'algorithme de lagrangien augmenté et de points intérieurs primal-dual introduit dans ce chapitre est inspiré de celui de Armand, Benoist et Orban [13]. Les principales différences entre ces deux algorithmes sont les suivantes.

- Le traitement des contraintes d'égalité : dans l'algorithme proposé, les contraintes d'égalité sont traitées à l'aide d'un lagrangien augmenté. Par conséquent, deux paramètres,  $\lambda$  et  $\sigma$ , sont introduits ce qui rend l'analyse de cet algorithme plus compliquée que celle dans [13]. Dans ce dernier, il n'y a aucun traitement particulier des contraintes d'égalité et l'algorithme introduit seulement une perturbation des conditions de complémentarité.
- La régularisation : l'avantage du traitement des contraintes d'égalité en utilisant un lagrangien augmenté est qu'il introduit une régularisation *naturelle* du système linéaire. L'importance de cet aspect est particulière pour la résolution des problèmes dégénérés. Les performances obtenues en utilisant une régularisation *artificielle*, dans le sens où les coefficients de la matrice du système linéaire sont modifiés au besoin indépendamment du second membre, sont moins bonnes que celles obtenues avec la régularisation naturelle (voir les résultats numériques du chapitre 2). Dans l'algorithme de Armand, Benoist et Orban, la régularisation est introduite de manière artificielle.
- La globalisation : numériquement, Armand, Benoist et Orban ont utilisé une technique de recherche linéaire basée sur une fonction de mérite *primale* pour assurer la convergence globale des itérations internes. Théoriquement, aucune analyse de convergence de ces itérations n'a été proposée. Notons que l'objectif des auteurs était d'étudier le comportement asymptotique de leur algorithme et de démontrer l'avantage de ne pas suivre le chemin central. Dans notre algorithme, la fonction de mérite utilisée par la stratégie de recherche linéaire est *primale-duale*. Le paramètre de pénalisation est autorisé à augmenter au cours des itérations internes. Une analyse théorique détaillée de la convergence de ces itérations est établie.

L'algorithme proposé consiste à appliquer une méthode de type Newton aux conditions d'optimalité perturbées (4.1.12) en maintenant  $v := (x, z)$  positif et en mettant à jour  $\mu$ ,  $\sigma$  et  $\lambda$  de manière à garantir la convergence globale vers une solution du problème initial.

Étant donné deux paramètres  $\mu_k > 0$  et  $\sigma_k > 0$ , une estimation du multiplicateur de Lagrange  $\lambda_k$  et un itéré  $w_k$  tel que  $v_k > 0$ , l'algorithme choisit de nouvelles valeurs  $\mu_k^+ > 0$ ,  $\sigma_k^+ > 0$  et  $\lambda_{k+1}$ . Comme dans les méthodes lagrangien augmenté classiques, le choix de  $\lambda_{k+1}$  et  $\sigma_k^+$  dépend de la violation des contraintes. Si cette dernière a diminué suffisamment, alors nous faisons  $\lambda_{k+1} = y_k$ . Sinon, nous gardons  $\lambda_{k+1}$  constant et nous diminuons suffisamment la valeur de  $\sigma_k^+$ . Pour tester la décroissance de la violation des contraintes, nous utilisons le même test introduit dans l'algorithme 3.1 du chapitre 3. Ensuite, la linéarisation du système d'équations (4.1.12) en l'itéré  $(w_k, \lambda_{k+1}, \sigma_k^+, \mu_k^+)$  par rapport à  $w$  donne le système primal-dual suivant :

$$\begin{pmatrix} H_k & \nabla g(x_k) & -I \\ \nabla g(x_k)^\top & -\sigma_k^+ I & 0 \\ Z_k & 0 & X_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k^+ - x_k \\ y_k^+ - y_k \\ z_k^+ - z_k \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla \mathcal{L}(w_k) \\ g(x_k) + \sigma_k^+ (\lambda_{k+1} - y_k) \\ X_k Z_k e - \mu_k^+ e \end{pmatrix}, \quad (4.1.14)$$

où  $H_k$  est la matrice hessienne du lagrangien ou son approximation. Lorsque l'estimation du multiplicateur est mis à jour selon  $\lambda_{k+1} = y_k$ , ce système linéaire apparaît comme

une méthode de Newton régularisée appliquée aux conditions d'optimalité du problème barrière (4.1.4). En définissant la matrice  $J(w_k, \sigma_k^+)$  par

$$J(w_k, \sigma_k^+) := \begin{pmatrix} H_k & \nabla g(x_k) & -I \\ \nabla g(x_k)^\top & -\sigma_k^+ I & 0 \\ Z_k & 0 & X_k \end{pmatrix},$$

le système (4.1.14) s'écrit sous la forme

$$J(w_k, \sigma_k^+)(w_k^+ - w_k) = -F(w_k, \lambda_{k+1}, \sigma_k^+, \mu_k^+).$$

Une condition nécessaire pour garantir la convergence globale de notre algorithme est que la matrice  $J(w_k, \sigma_k^+)$  est inversible et son inverse reste uniformément bornée. D'après Armand et Benoist [9, Théorème 1], une hypothèse nécessaire pour que cette condition soit satisfaite est que  $\sigma_k^+ = \Omega(\mu_k)$ . Cette hypothèse implique implicitement que la convergence du paramètre de pénalisation vers zéro n'est possible que lorsque le paramètre barrière converge vers zéro. Cependant, il peut se faire que la suite  $\{\sigma_k^+\}$  tend vers zéro et que la suite  $\{\mu_k\}$  reste bornée inférieurement par une constante positive. Cette situation peut se produire lorsque le test utilisé pour décider si la violation de contraintes a diminué n'est pas satisfait une infinité de fois. Dans ce cas, si la matrice  $\nabla g(x_k)$  n'est pas de plein rang, alors la matrice  $J(w_k, \sigma_k^+)$  est évidemment singulière. Par conséquent, la convergence globale de l'algorithme n'est plus garantie. Pour faire face à cette situation, nous proposons de changer le terme de régularisation de la matrice  $J(w_k, \sigma_k^+)$  par un terme  $\delta_k$  indépendant de  $\sigma_k^+$ . Par suite le système linéaire résolu à chaque itération externe est

$$J(w_k, \delta_k)(w_k^+ - w_k) = -F(w_k, \lambda_{k+1}, \sigma_k^+, \mu_k^+). \quad (4.1.15)$$

Notons ici que cette modification n'est appliquée qu'au cours des itérations externes. Au cours des itérations internes, il est indispensable d'utiliser le paramètre de pénalisation comme terme de régularisation afin de garantir que la solution du système linéaire est une direction de descente d'une fonction de mérite.

Pour garantir que les itérés restent strictement réalisables par rapport à la contrainte de positivité, une longueur de pas  $\alpha_k$  est calculée le long de la direction de Newton  $(w_k^+ - w_k)$  en appliquant la règle de la fraction du déplacement à la frontière : soit  $\alpha_k$  le plus grand  $\alpha \in ]0, 1]$  tel que

$$v_k + \alpha(v_k^+ - v_k) \geq (1 - \tau_k)v_k,$$

où  $\tau_k \in ]0, 1[$ . Le nouvel itéré est donc déterminé par

$$\hat{w}_k = w_k + \alpha_k(w_k^+ - w_k).$$

Notons ici qu'au cours des itérations externes, notre algorithme offre la possibilité d'utiliser de différentes longueurs de pas pour de différentes composantes du nouvel itéré  $\hat{w}_k$ , c'est à dire la  $i$ -ème composante du vecteur  $\hat{w}_k$  peut être remplacée par

$$[\hat{w}_k]_i = [w_k]_i + \alpha_{k,i} [w_k^+ - w_k]_i,$$

où  $\alpha_k \leq \alpha_{k,i} \leq 1$ , sans affecter la convergence globale des itérations externes. Si l'itéré  $\hat{w}_k$  a réalisé un progrès suffisant dans la résolution de (4.1.12), c'est à dire

$$\|F(\hat{w}_k, \lambda_{k+1}, \sigma_k^+, \mu_{k+1})\| \leq \varepsilon_k,$$

où  $\varepsilon_k$  est une tolérance qui converge vers zéro et  $\mu_{k+1}$  est une nouvelle valeur du paramètre barrière, alors  $\hat{w}_k$  sera le point initial d'une nouvelle itération externe. Si ce n'est pas le cas, alors une suite d'itérations internes est appliquée pour identifier une pair  $(w_{k+1}, \sigma_{k+1})$  vérifiant

$$\|F(w_{k+1}, \lambda_{k+1}, \sigma_{k+1}, \mu_{k+1})\| \leq \varepsilon_k.$$

Au cours de ces itérations, l'estimation du multiplicateur de Lagrange et le paramètre barrière sont maintenus fixes et le paramètre de pénalisation est autorisé à augmenter. La globalisation des itérations internes est assurée à l'aide d'une technique de recherche linéaire qui satisfait une condition d'Armijo en utilisant une fonction de mérite primale-duale.

Transformer le problème initial en une suite de problèmes sans contraintes est une technique très connue et remonte aux années 60. Fiacco et McCormick [57] ont développé une méthode de pénalisation mixte qui traite les contraintes d'égalité et d'inégalité à l'aide respectivement d'une fonction de pénalisation quadratique et une fonction barrière logarithmique classique. Cette méthode a été étudiée dans le contexte primal-dual par Chen et Goldfarb [36], Forsgren et Gill [61], Tits *et al.* [113] et Yamashita et Yabe [130]. En 1995, Benchakroun, Dussault et Mansouri [16] ont étudié la même méthode, dans le contexte primal, mais en utilisant deux paramètres de pénalisation distincts. En contrôlant soigneusement ces deux paramètres, ils ont montré que la méthode est globalement convergente et qu'elle jouit d'un taux de convergence superlinéaire. Breitfeld et Shanno [27] ont traité les contraintes d'égalité avec une fonction de lagrangien augmenté et les contraintes d'inégalité avec une fonction barrière logarithmique modifiée. Un autre type d'approche consiste à éliminer seulement les contraintes d'inégalité à l'aide d'une fonction barrière logarithmique et ensuite appliquer une méthode SQP au problème avec contraintes d'égalité. Cette méthode a largement été étudiée, voir par exemple [31, 33]. Récemment, Gill et Robinson [71] ont proposé une méthode SQP régularisée basée sur la minimisation d'une fonction de lagrangien augmenté primal-dual sous des contraintes de borne. La particularité de cette méthode est que la globalisation s'effectue dans les deux espaces, primal et dual. Le point commun de la plupart des méthodes citées ci-dessus est qu'elles introduisent une régularisation duale du problème. L'introduction d'une régularisation primale-duale a été étudiée par Friedlander et Orban [64] dans le contexte de la programmation quadratique convexe. Notons que la régularisation primale est étroitement liée à la méthode de point proximal.

Le reste de ce chapitre est organisé comme suit. La section suivante est consacrée à la description détaillée de l'algorithme primal-dual proposé. La convergence globale des deux types d'itérations, externe et interne, est établie à la section 4.3. Le comportement asymptotique de la suite générée par l'algorithme est étudié dans la section 4.4. Nous montrons en particulier que la suite des itérés est asymptotiquement tangente au chemin central et que son taux de convergence vers la solution est le même que celui de la suite  $\{\mu_k\}$  vers zéro. Nous donnons dans la section 4.5 les détails de l'implémentation de notre algorithme. Les résultats numériques sur une large collection de problèmes d'optimisation non linéaire sont présentés dans la section 4.6. Nous commençons par décrire l'influence du choix du paramètre barrière et du point de départ des itérations internes sur les performances de notre code. Nous présentons ensuite des comparaisons de notre méthode avec les codes IPOPT [121], ALGENCAN [4, 5] et LANCELOT [40] sur des problèmes standards provenant des bibliothèques Hock et Schittkowski [83] et CUTEst [81] et sur des



problèmes dégénérés provenant des bibliothèques COPS [52], CUTer [77] et MacMPEC [89].

## 4.2 Description de l'algorithme

### 4.2.1 Itération externe

Nous décrivons maintenant les itérations externes dans l'algorithme 4.1. Ce dernier est initialisé avec un point de départ  $w_0 := (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^N$  tel que  $v_0 = (x_0, z_0) > 0$ , un paramètre barrière  $\mu_0 > 0$ , un paramètre de pénalisation  $\sigma_0 > 0$ , une estimation initiale du multiplicateur de Lagrange  $\lambda_0 = y_0$  et trois constantes  $a, \rho \in ]0, 1[$  et  $\ell \in \mathbb{N}$ . L'indice d'itération est initialisé à  $k = 0$ . Le premier terme d'une suite  $\{i_k\}$  est fixé à zéro.

---

**Algorithme 4.1** Itération externe

---

1. Choisir  $\mu_k^+ > 0$ ,  $\delta_k > 0$ ,  $\tau_k > 0$ ,  $r_k > 0$  et  $\zeta_k \geq 0$  tels que  $\{r_k\} \rightarrow 0$  et  $\{\zeta_k\} \rightarrow 0$ . Faire  $\eta_k = \|g(x_k)\| + \zeta_k$ . Si

$$\|g(x_k)\| \leq a \max \{ \eta_{i_j} : (k - \ell)^+ \leq j \leq k \}, \quad (4.2.1)$$

alors, aller à l'étape 2. Sinon, aller à l'étape 3.

2. Choisir  $\sigma_k^+ \leq \sigma_k$ . Faire  $s_k = \max\{\sigma_k^+, r_k\}$ ,  $\lambda_{k+1} = y_k$ ,  $i_{k+1} = k$  et aller à l'étape 4.
3. Choisir  $\sigma_k^+ \leq \min\{\rho\sigma_k, r_k\}$ . Faire  $s_k = r_k$ ,  $\lambda_{k+1} = \lambda_k$  et  $i_{k+1} = i_k$ .
4. Calculer l'itéré de Newton  $w_k^+$  en résolvant le système linéaire

$$J(w_k, \delta_k) (w_k^+ - w_k) = -F(w_k, \lambda_{k+1}, \sigma_k^+, \mu_k^+). \quad (4.2.2)$$

5. Calculer  $\alpha_k$  comme étant le plus grand  $\alpha \in ]0, 1]$  tel que

$$v_k + \alpha(v_k^+ - v_k) \geq (1 - \tau_k)v_k. \quad (4.2.3)$$

Choisir un vecteur  $a_k = (a_k^x, a_k^y, a_k^z) \in [\alpha_k, 1]^N$  tel que

$$v_k + a_k^v \circ (v_k^+ - v_k) > 0, \quad (4.2.4)$$

où  $a_k^v = (a_k^x, a_k^z)$ .

6. Faire  $\widehat{w}_k = w_k + a_k \circ (w_k^+ - w_k)$  et  $\mu_{k+1} = \mu_k + \alpha_k(\mu_k^+ - \mu_k)$ .
7. Choisir  $\varepsilon_k > 0$  tel que  $\{\varepsilon_k\} \rightarrow 0$ . Si

$$\|F(\widehat{w}_k, \lambda_{k+1}, \sigma_k^+, \mu_{k+1})\| \leq \varepsilon_k, \quad (4.2.5)$$

alors, faire  $w_{k+1} = \widehat{w}_k$  et  $\sigma_{k+1} = \sigma_k^+$ . Sinon, appliquer une suite d'itérations internes pour trouver  $w_{k+1}$  et  $\sigma_{k+1} \in [\sigma_k^+, s_k]$  tels que  $v_{k+1} > 0$  et

$$\|F(w_{k+1}, \lambda_{k+1}, \sigma_{k+1}, \mu_{k+1})\| \leq \varepsilon_k. \quad (4.2.6)$$

---

Les règles de mise à jour des paramètres  $\sigma_k^+$  et  $\lambda_{k+1}$ , introduites aux étapes 2 et 3

de l'algorithme 4.1, sont identiques à celles proposées dans l'algorithme 3.1 du chapitre précédent. La convergence globale de cet algorithme est garantie sans avoir besoin de diminuer  $\sigma_k^+$  et par suite  $\sigma_{k+1}$  lorsque l'itéré actuel a réalisé un progrès suffisant vers la faisabilité primale. Le résultat du lemme 3.2.1 reste vrai dans ce contexte.

Le paramètre barrière  $\mu_{k+1}$  est mis à jour à l'étape 6 de l'algorithme 4.1 avec une formule qui dépend du pas de recherche linéaire  $\alpha_k$ . Ce choix a été proposé dans [12] et les résultats numériques présentés ont montré que ce réglage dynamique permet d'améliorer les performances de l'algorithme en terme d'efficacité et robustesse. Ceci est dû, d'après Armand, Benoist et Orban, au fait que cette formulation introduit un contrôle naturel de la décroissance du paramètre barrière et évite de grands écarts entre la valeur de ce paramètre et celle des conditions d'optimalité perturbées.

### 4.2.2 Itération interne

Une itération interne correspond à une itération de type Newton appliquée aux conditions d'optimalité perturbées (4.1.11). Cette itération commence par éventuellement augmenter la valeur du paramètre de pénalisation en utilisant la même stratégie utilisée à l'étape 1 de l'algorithme 3.2 du chapitre précédent. Les paramètres  $\mu$  et  $\lambda$  sont maintenus fixes. Ensuite, un système linéaire est résolu. La solution est utilisée pour déterminer un nouvel itéré qui soit strictement réalisable par rapport à la contrainte de positivité en appliquant la règle de la fraction du déplacement à la frontière. Contrairement aux itérations externes, l'utilisation de différentes longueurs de pas  $\alpha$  pour de différentes composantes de  $w$  n'est pas autorisée afin de garantir la propriété de descente pour la fonction de mérite. La globalisation de cette itération est effectuée en utilisant une technique de recherche linéaire qui satisfait une condition d'Armijo le long de la direction primale-duale calculée au début de chaque itération interne. La fonction primale-duale utilisée est

$$\Theta_{\lambda,\sigma,\mu}(w) = \varphi_{\lambda,\sigma,\mu}(x) + \nu_1 \psi_{\lambda,\sigma}(x, y) + \nu_2 \mathcal{V}_\mu(x, z), \quad (4.2.7)$$

où  $\nu_1 > 0$ ,  $\nu_2 > 0$ ,

$$\psi_{\lambda,\sigma}(x, y) = \frac{1}{2\sigma} \|g(x) + \sigma(\lambda - y)\|^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{V}_\mu(x, z) = x^\top z - \mu \sum_{i=1}^n \log(x_i z_i). \quad (4.2.8)$$

L'algorithme d'itérations internes est initialisé avec un point de départ  $w^0$ , deux paramètres de mise à l'échelle  $\nu_1$  et  $\nu_2$  et un paramètre de pénalisation  $\sigma^0$  vérifiant  $\sigma_k^+ \leq \sigma^0 \leq \bar{\sigma} \leq s_k$ , où  $\bar{\sigma}$  est une borne supérieure pour éviter que le paramètre de pénalisation devienne non borné. Nous choisissons encore deux constantes  $\omega \in ]0, 1[$  et  $\kappa \in ]0, \frac{1}{2}]$ . L'indice d'itérations est initialisé à  $i = 0$ .

**Algorithme 4.2** Itération interne

1. Si  $i \geq 1$ , mettre à jour  $\sigma^i$  en l'augmentant éventuellement.
2. Calculer la direction  $d_w^i$  en résolvant le système linéaire

$$J(w^i, \sigma^i) d_w = -F(w^i, \lambda, \sigma^i, \mu). \quad (4.2.9)$$

3. Calculer  $\alpha^i$  comme étant le plus grand  $\alpha \in ]0, 1]$  vérifiant

$$v^i + \alpha d_v^i \geq (1 - \tau) v^i.$$

4. Faire  $\alpha^i = 1$ . Tant que la condition

$$\Theta_{\lambda, \sigma^i, \mu}(w^i + \alpha^i d_w^i) \leq \Theta_{\lambda, \sigma^i, \mu}(w^i) + \omega \alpha^i \nabla \Theta_{\lambda, \sigma^i, \mu}(w^i)^\top d_w^i \quad (4.2.10)$$

n'est pas satisfaite, choisir un nouveau pas  $\alpha^i \in [\kappa \alpha^i, (1 - \kappa) \alpha^i]$ .

5. Faire  $w^{i+1} = w^i + \alpha^i d_w^i$ .

La proposition suivante donne la formule de la dérivée directionnelle de la fonction de mérite (4.2.7) et les conditions sous lesquelles la solution du système linéaire (4.2.9) est une direction de descente de  $\Theta_{\lambda, \sigma, \mu}$ .

**Proposition 4.2.1.** Soit  $d_w = (d_x, d_y, d_z)$  une solution du système linéaire (4.2.9), alors

$$\nabla \Theta_{\lambda, \sigma, \mu}(w)^\top d_w = -d_x^\top K(w, \sigma) d_x - \frac{\nu_1}{\sigma} \|g(x) + \sigma(\lambda - y)\|^2 - \nu_2 \|X^{-\frac{1}{2}} Z^{\frac{1}{2}}(x - \mu Z^{-1} e)\|^2. \quad (4.2.11)$$

où  $K(w, \sigma) := \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(w) + \frac{1}{\sigma} \nabla g(x) \nabla g(x)^\top + X^{-1} Z$ . De plus, si  $K(w, \sigma)$  est définie positive et si  $F(w, \lambda, \sigma, \mu)$  est non nulle, alors la solution du système linéaire (4.2.9) est une direction de descente de la fonction de mérite.

**Preuve.** La dérivée directionnelle de la fonction de mérite  $\Theta_{\lambda, \sigma, \mu}$  est donnée par

$$\nabla \Theta_{\lambda, \sigma, \mu}(w)^\top d_w = \nabla \varphi_{\lambda, \sigma, \mu}(x)^\top d_x + \nu_1 \nabla \psi_{\lambda, \sigma}(x, y)^\top \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix} + \nu_2 \nabla \mathcal{V}_\mu(x, z)^\top \begin{pmatrix} d_x \\ d_z \end{pmatrix}.$$

Nous avons

$$\nabla \varphi_{\lambda, \sigma, \mu}(x)^\top d_x = \nabla f(x)^\top d_x + \lambda^\top \nabla g(x)^\top d_x + \frac{1}{\sigma} g(x)^\top \nabla g(x)^\top d_x - \mu e^\top X^{-1} d_x. \quad (4.2.12)$$

En utilisant l'équation (4.2.9), nous obtenons les relations suivantes

$$H d_x + \nabla g(x) d_y - d_z = -\nabla f(x) - \nabla g(x) y + z, \quad (4.2.13)$$

$$\nabla g(x)^\top d_x - \sigma d_y = -g(x) - \sigma(\lambda - y), \quad (4.2.14)$$

$$Z d_x + X d_z = -X Z e + \mu e. \quad (4.2.15)$$

La relation (4.2.13) nous donne

$$\nabla f(x)^\top d_x = -d_x^\top H d_x - (y + d_y)^\top \nabla g(x)^\top d_x + (z + d_z)^\top d_x.$$

En substituant ceci dans (4.2.12), nous obtenons

$$\nabla \varphi_{\lambda, \sigma, \mu}(x)^\top d_x = -d_x^\top H d_x - (y + d_y - \lambda - \frac{1}{\sigma} g(x))^\top \nabla g(x)^\top d_x + (z + d_z - \mu X^{-1} e)^\top d_x. \quad (4.2.16)$$

Nous calculons maintenant la dérivée directionnelle de  $\psi_{\lambda, \sigma}$ . Nous avons

$$\begin{aligned} \nabla \psi_{\lambda, \sigma}(x, y)^\top \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sigma} (g(x) + \sigma(\lambda - y))^\top \nabla g(x)^\top d_x + \frac{1}{\sigma} (g(x) + \sigma(\lambda - y))^\top (-\sigma d_y) \\ &= \frac{1}{\sigma} (g(x) + \sigma(\lambda - y))^\top (\nabla g(x)^\top d_x - \sigma d_y). \end{aligned}$$

En utilisant (4.2.14), nous obtenons

$$\nabla \psi_{\lambda, \sigma}(x, y)^\top \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sigma} \|g(x) + \sigma(\lambda - y)\|^2. \quad (4.2.17)$$

Finalement, la dérivée directionnelle de  $\mathcal{V}_\mu$  est donnée par

$$\begin{aligned} \nabla \mathcal{V}_\mu(x, z)^\top \begin{pmatrix} d_x \\ d_z \end{pmatrix} &= (z - \mu X^{-1} e)^\top d_x + (x - \mu Z^{-1} e)^\top d_z \\ &= (x - \mu Z^{-1} e)^\top (X^{-1} Z d_x + d_z). \end{aligned}$$

Sachant que  $X^{-1} Z d_x + d_z = -z + \mu X^{-1} e$  et en utilisant (4.2.15), nous obtenons

$$\begin{aligned} \nabla \mathcal{V}_\mu(x, z)^\top \begin{pmatrix} d_x \\ d_z \end{pmatrix} &= (x - \mu Z^{-1} e)^\top (\mu X^{-1} e - z) \\ &= -X^{-1} Z (x - \mu Z^{-1} e)^\top (x - \mu Z^{-1} e) \\ &= -\|X^{-\frac{1}{2}} Z^{\frac{1}{2}} (x - \mu Z^{-1} e)\|^2. \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

L'expression (4.2.11) est donc obtenue en combinant (4.2.16), (4.2.17) et (4.2.18).

Notre hypothèse sur  $K(w, \sigma)$  implique que  $\nabla \Theta_{\lambda, \sigma, \mu}(w)^\top d_w \leq 0$ . La dérivée directionnelle est égale à zéro si et seulement si  $d_x = 0$ ,  $g(x) + \sigma(\lambda - y) = 0$  et  $x - \mu Z^{-1} e = 0$ . En utilisant ceci et les équations (4.2.13), (4.2.14) et (4.2.15), nous concluons que  $d_y = 0$  et  $d_z = 0$ , ce qui implique que  $F(w, \lambda, \sigma, \mu) = 0$ , d'après (4.2.9).  $\square$

## 4.3 Analyse de convergence globale

Cette section est consacrée à l'analyse de convergence globale de l'algorithme. Nous commençons par celle de l'algorithme 4.2 et donnons ensuite celle de l'algorithme 4.1. Tout au long de cette section, il est supposé que les fonctions  $f$  et  $g$  sont continûment différentiables sur  $\mathbb{R}^n$ .

### 4.3.1 Itérations internes

Soit  $\{w^i\}$  une suite infinie générée par l'algorithme 4.2. L'analyse de convergence des itérations internes est réalisée sous les hypothèses suivantes.

**Hypothèse 4.3.1.** La suite  $\{x^i\}$  reste dans un ensemble compact  $\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^n : x > 0\}$ .

**Hypothèse 4.3.2.** Les matrices  $K(w^i, \sigma^i)$  sont uniformément définies positives, pour tout  $i \in \mathbb{N}$ .

**Hypothèse 4.3.3.** La suite  $\{H^i\}$  est bornée.

L'hypothèse 4.3.1, ou bien autre hypothèse similaire, est standard pour étudier la convergence globale des itérations internes, voir par exemple [71, 116, 120]. Dans [130], Yamashita et Yabe supposent que toute la suite  $\{w^i\}$  reste dans un compact. Concernant l'hypothèse 4.3.3, si la matrice  $H^i$  est choisie comme étant la matrice hessienne du lagrangien, alors sa bornitude découle directement de l'hypothèse 4.3.1 et le lemme 4.3.2 (donné ultérieurement). Pour simplifier les notations, la fonction de mérite sera notée  $\Theta_{\sigma^i}(w^i) := \Theta_{\lambda, \sigma^i, \mu}(w^i)$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$ .

**Lemme 4.3.1.** Sous l'hypothèse 4.3.1, l'algorithme 4.2 génère une suite  $\{v^i\}$  pour laquelle chaque composante est bornée supérieurement et est bornée inférieurement par une constante positive.

**Preuve.** Tout d'abord, l'hypothèse 4.3.1 implique que la fonction  $x \mapsto f(x) + \lambda^\top g(x)$  est bornée inférieurement par une constante  $M_1$ . Ensuite, la suite  $\{\Theta_{\sigma^i}(w^i)\}$  est décroissante (d'après (4.2.10) et le choix de  $\sigma^i$ ). En outre, la fonction  $\psi_{\lambda, \sigma^i}$  est bornée inférieurement par une constante positive ou nulle. En utilisant tous ces arguments, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \Theta_{\sigma^0}(w^0) &\geq \Theta_{\sigma^i}(w^i) \\ &\geq \inf_{x \in \Omega} (f(x) + \lambda^\top g(x)) - \mu \sum_{j=1}^n \log([x^i]_j) + \nu_2 \mathcal{V}_\mu(x^i, z^i) \\ &\geq M_1 - \mu \log([x^i]_k) - \mu \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \log([x^i]_j) + \nu_2 \mathcal{V}_\mu(x^i, z^i), \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

où  $k \in \{1, \dots, n\}$ . En divisant les deux membres de l'inégalité (4.3.1) par  $\mu$ , nous obtenons

$$\log([x^i]_k) \geq \frac{1}{\mu} M_1 - \frac{1}{\mu} \Theta_{\sigma^0}(w^0) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \log([x^i]_j) + \frac{\nu_2}{\mu} \mathcal{V}_\mu(x^i, z^i). \quad (4.3.2)$$

Puisque  $\{x^i\}$  est bornée et  $\mathcal{V}_\mu$  est bornée inférieurement, il découle que le membre droit de l'inégalité (4.3.2) est borné inférieurement ce qui implique que la suite  $\{[x^i]_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  est bornée inférieurement par une constante positive.

D'après la définition de  $\mathcal{V}_\mu$ , nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_\mu(x^i, z^i) &= \sum_{j=1}^n ([x^i]_j [z^i]_j - \mu \log([x^i]_j [z^i]_j)) \\ &= [x^i]_k [z^i]_k - \mu \log([x^i]_k [z^i]_k) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n ([x^i]_j [z^i]_j - \mu \log([x^i]_j [z^i]_j)) \\ &\geq [x^i]_k [z^i]_k - \mu \log([x^i]_k [z^i]_k) + (n-1)\mu(1 - \log(\mu)). \end{aligned}$$

En utilisant ceci et l'inégalité (4.3.1), nous obtenons

$$\frac{1}{\nu_2}(\Theta_{\sigma^0}(w^0) - M_1 + \mu \sum_{j=1}^n \log([x^i]_j)) - (n-1)\mu(1 - \log(\mu)) \geq [x^i]_k [z^i]_k - \mu \log([x^i]_k [z^i]_k). \quad (4.3.3)$$

Puisque la suite  $\{x^i\}$  est bornée, le membre gauche de l'inégalité (4.3.3) est borné supérieurement ce qui implique que la suite  $\{[x^i]_k [z^i]_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  est bornée supérieurement et est bornée inférieurement par une constante positive ce qui est le cas pour la suite  $\{z^i\}$ .  $\square$

Le paramètre de pénalisation calculé à l'étape 1 de l'algorithme 4.2 vérifie

$$\sigma^i \in [\sigma^0, \bar{\sigma}]. \quad (4.3.4)$$

Cette relation sera utilisée pour démontrer la bornitude de la suite  $\{w^i\}$  dans le lemme suivant et sa convergence dans le théorème 4.3.1.

**Lemme 4.3.2.** *Sous les hypothèses 4.3.1 et 4.3.2, les suites  $\{d_w^i\}$  et  $\{w^i\}$  générées par l'algorithme 4.2 sont bornées.*

**Preuve.** D'après le lemme 4.3.1, les suites  $\{x^i\}$  et  $\{z^i\}$  sont bornées. Donc, il ne nous reste qu'à démontrer la bornitude des suites  $\{d_w^i\}$  et  $\{y^i\}$ .

En utilisant (4.2.13)-(4.2.15), nous avons

$$K(w^i, \sigma^i) d_x^i = -\nabla f(x^i) - \nabla g(x^i)(\lambda + \frac{1}{\sigma^i} g(x^i)) + \mu (X^i)^{-1} e. \quad (4.3.5)$$

D'après l'hypothèse 4.3.2, il existe une constante  $M_2 > 0$  telle que

$$d_x^{i\top} K(w^i, \sigma^i) d_x^i \geq M_2 \|d_x^i\|^2. \quad (4.3.6)$$

En utilisant (4.3.4)-(4.3.6), nous obtenons

$$M_2 \|d_x^i\| \leq \|\nabla f(x^i)\| + \|\nabla g(x^i)\|(\|\lambda\| + \frac{1}{\sigma^0} \|g(x^i)\|) + \mu \|(X^i)^{-1} e\|.$$

Puisque  $\{x^i\}$  se trouve dans un ensemble compact, les suites  $\{\nabla f(x^i)\}$ ,  $\{\nabla g(x^i)\}$  et  $\{g(x^i)\}$  sont bornées. De plus, d'après le lemme 4.3.1, chaque composante de la suite  $\{(X^i)^{-1} e\}$  est bornée. La bornitude de toutes ces suites permet de conclure que la suite  $\{d_x^i\}$  est bornée.

D'après (4.2.15), nous avons

$$d_z^i = -z^i - (X^i)^{-1} Z^i d_x + \mu (X^i)^{-1} e,$$

ce qui implique

$$\|d_z^i\| \leq \|z^i\| + \|(X^i)^{-1} Z^i\| \|d_x^i\| + \mu \|(X^i)^{-1} e\|.$$

Puisque la suite  $\{z^i\}$  est bornée et chaque composante de la suite  $\{x^i\}$  est bornée inférieurement par une constante positive, la suite  $\{(X^i)^{-1} Z^i\}$  est bornée. En utilisant ceci et la bornitude de la suite  $\{d_x^i\}$ , il découle que  $\{d_z^i\}$  est bornée.

Montrons maintenant que la suite  $\{y^i\}$  est bornée. D'après (4.2.14), nous avons

$$y^i + d_y^i = \lambda + \frac{1}{\sigma^i} g(x^i) + \frac{1}{\sigma^i} \nabla g(x^i)^\top d_x^i,$$

et donc

$$\|y^i + d_y^i\| \leq \|\lambda\| + \frac{1}{\sigma_0} \|g(x^i)\| + \frac{1}{\sigma_0} \|\nabla g(x^i)\| \|d_x^i\|,$$

ce qui implique que la suite  $\{y^i + d_y^i\}$  est bornée par une constante  $M_3 \geq 0$ . D'après l'algorithme 4.2, nous avons

$$y^{i+1} = (1 - \alpha^i) y^i + \alpha^i (y^i + d_y^i). \quad (4.3.7)$$

Soit  $M_4 := \max\{M_3, \|y^0\|\}$  et montrons par récurrence que pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , nous avons

$$\|y^i\| \leq M_4. \quad (4.3.8)$$

La propriété (4.3.8) est trivialement vraie pour  $i = 0$ . Supposons maintenant que (4.3.8) est vraie pour  $i \geq 0$ . Alors, en prenant la norme dans (4.3.7), nous obtenons

$$\begin{aligned} \|y^{i+1}\| &\leq (1 - \alpha^i) \|y^i\| + \alpha^i \|y^i + d_y^i\| \\ &\leq (1 - \alpha^i) M_4 + \alpha^i M_4 \\ &= M_4, \end{aligned}$$

à partir de laquelle découle la bornitude de la suite  $\{y^i\}$ . Finalement, la bornitude de la suite  $\{d_y^i\}$  découle directement de celle de  $\{y^i\}$  et de  $\{y^i + d_y^i\}$ . La preuve est terminée.  $\square$

Après avoir démontré la bornitude de la suite  $\{w^i\}$ , nous sommes maintenant capables de démontrer le résultat de convergence globale de l'algorithme des itérations internes.

**Théorème 4.3.1.** *Supposons que les hypothèses 4.3.1-4.3.3 soient satisfaites. Alors, la suite  $\{F(w^i, \lambda, \sigma^i, \mu)\}$  converge vers zéro.*

**Preuve.** Soit  $i \in \mathbb{N}$ . La condition de la décroissance suffisante (4.2.10) implique que

$$\omega \alpha^i |\nabla \Theta_{\sigma^i}(w^i)^\top d_w^i| \leq \Theta_{\sigma^i}(w^i) - \Theta_{\sigma^i}(w^{i+1}). \quad (4.3.9)$$

En remarquant que  $\Theta_{\sigma^{i+1}}(w^{i+1}) \leq \Theta_{\sigma^i}(w^{i+1})$  pour tout  $i \geq 0$ , l'inégalité (4.3.9) s'écrit

$$\omega \alpha^i |\nabla \Theta_{\sigma^i}(w^i)^\top d_w^i| \leq \Theta_{\sigma^i}(w^i) - \Theta_{\sigma^{i+1}}(w^{i+1}).$$

En sommant ces inégalités pour  $i$  de 0 à un entier arbitraire  $p$ , nous obtenons

$$\omega \sum_{i=0}^p \alpha^i |\nabla \Theta_{\sigma^i}(w^i)^\top d_w^i| \leq \Theta_{\sigma^0}(w^0) - \Theta_{\sigma^{p+1}}(w^{p+1}).$$

En rappelant que la suite  $\{\Theta_{\sigma^i}(w^i)\}$  est bornée inférieurement, nous concluons que la série  $\sum \alpha^i |\nabla \Theta_{\sigma^i}(w^i)^\top d_w^i|$  est convergente ce qui implique que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \alpha^i |\nabla \Theta_{\sigma^i}(w^i)^\top d_w^i| = 0. \quad (4.3.10)$$

Nous proposons maintenant de démontrer que  $\nabla\Theta_{\sigma^i}(w^i)^\top d_w^i \rightarrow 0$ . Le raisonnement est par contradiction en supposant qu'il existe  $\varepsilon > 0$  et un intervalle  $I \subset \mathbb{N}$  tels que pour tout  $i \in I$ , nous avons

$$|\nabla\Theta_{\sigma^i}(w^i)^\top d_w^i| \geq \varepsilon > 0. \quad (4.3.11)$$

Donc, d'après (4.3.10), nous avons  $\alpha^i \rightarrow 0$  lorsque  $i$  tend vers l'infini et  $i \in I$ , ce qui implique que  $\alpha^i < 1$  pour tout  $i$  suffisamment grand. Pour un tel indice  $i$ , il existe au moins un pas de rebroussement pour lequel la condition de la décroissance suffisante (4.2.10) n'est pas satisfaite, c'est à dire il existe une longueur de pas  $\bar{\alpha}^i > 0$  telle que  $\alpha^i \in [\kappa\bar{\alpha}^i, (1-\kappa)\bar{\alpha}^i]$  et

$$\Theta_{\sigma^i}(\bar{w}^i) > \Theta_{\sigma^i}(w^i) + \omega\bar{\alpha}^i\nabla\Theta_{\sigma^i}(w^i)^\top d_w^i, \quad (4.3.12)$$

où  $\bar{w}^i := w^i + \bar{\alpha}^i d_w^i$ . En appliquant le théorème de la moyenne, pour tout  $i$  suffisamment grand, il existe  $\tilde{\alpha}^i \in ]0, \bar{\alpha}^i[$  tel que

$$\Theta_{\sigma^i}(\bar{w}^i) - \Theta_{\sigma^i}(w^i) = \tilde{\alpha}^i \nabla\Theta_{\sigma^i}(w^i + \tilde{\alpha}^i d_w^i)^\top d_w^i.$$

En substituant ceci dans (4.3.12) et en simplifiant par  $\bar{\alpha}^i$ , nous obtenons

$$\nabla\Theta_{\sigma^i}(w^i + \tilde{\alpha}^i d_w^i)^\top d_w^i - \nabla\Theta_{\sigma^i}(w^i)^\top d_w^i > (1-\omega)|\nabla\Theta_{\sigma^i}(w^i)^\top d_w^i|, \quad (4.3.13)$$

et donc,

$$\|\nabla\Theta_{\sigma^i}(w^i + \tilde{\alpha}^i d_w^i) - \nabla\Theta_{\sigma^i}(w^i)\| \|d_w^i\| > (1-\omega)|\nabla\Theta_{\sigma^i}(w^i)^\top d_w^i| > 0. \quad (4.3.14)$$

En utilisant la même technique utilisée dans les chapitres 2 et 3 pour la décomposition de la fonction de mérite et en prenant ensuite la limite lorsque  $i$  tend vers l'infini, nous déduisons que  $\nabla\Theta_{\sigma^i}(w^i)^\top d_w^i$  tend vers zéro ce qui est en contradiction avec (4.3.11).

Nous démontrons maintenant la convergence de la suite  $\{F(w^i, \lambda, \sigma^i, \mu)\}$  vers zéro. En utilisant (4.2.11), (4.3.4), (4.3.6) et le fait que la suite  $\{x^i\}$  est bornée et que la suite  $\{z^i\}$  est bornée inférieurement par une constante positive, nous obtenons

$$\begin{aligned} |\nabla\Theta_{\sigma^i}(w^i)^\top d_w^i| &= d_x^{i\top} K(w^i, \sigma^i) d_x^i + \frac{\nu_1}{\sigma^i} \|g(x^i) + \sigma^i(\lambda - y^i)\|^2 + \nu_2 \|(X^i)^{-\frac{1}{2}}(Z^i)^{\frac{1}{2}}(x^i - \mu(Z^i)^{-1}e)\|^2 \\ &\geq M_2 \|d_x^i\|^2 + \frac{\nu_1}{\sigma} \|g(x^i) + \sigma^i(\lambda - y^i)\|^2 + \nu_2 \|(X^i)^{-\frac{1}{2}}(Z^i)^{\frac{1}{2}}(x^i - \mu(Z^i)^{-1}e)\|^2 \\ &\geq M_5 (\|d_x^i\|^2 + \|g(x^i) + \sigma^i(\lambda - y^i)\|^2 + \|x^i - \mu(Z^i)^{-1}e\|^2) \\ &\geq 0, \end{aligned} \quad (4.3.15)$$

où  $M_5$  est une constante positive. En utilisant (4.3.15) et le fait que  $\{\nabla\Theta(w^i)^\top d_w^i\}$  converge vers zéro, nous obtenons

$$d_x^i \rightarrow 0, \quad g(x^i) + \sigma^i(\lambda - y^i) \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad x^i - \mu(Z^i)^{-1}e \rightarrow 0, \quad (4.3.16)$$

lorsque  $i \rightarrow \infty$ . D'autre part, en utilisant (4.2.13), les expressions de  $d_y$  et  $d_z$  données respectivement par (4.2.14) et (4.2.15) et sachant que  $\sigma^i \geq \sigma^0$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \|\nabla_x \mathcal{L}(w^i)\| &= \|H^i d_x^i + \nabla g(x^i) d_y^i - d_z^i\| \\ &\leq \|H^i\| \|d_x^i\| + \|\nabla g(x^i)\| \|d_y^i\| + \|d_z^i\| \\ &\leq (\|H^i\| + \frac{1}{\sigma^0} \|\nabla g(x^i)\|^2 + \|(X^i)^{-1} Z^i\|) \|d_x^i\| \\ &\quad + \frac{1}{\sigma^0} \|\nabla g(x^i)\| \|g(x^i) + \sigma^i(\lambda - y^i)\| + \|z^i - \mu(X^i)^{-1}e\|. \end{aligned}$$



En utilisant la définition de  $F(w, \lambda, \sigma, \mu)$ , l'inégalité précédente et la bornitude des suites  $\{x^i\}$ ,  $\{H^i\}$ ,  $\{\nabla g(x^i)\}$  et  $\{(X^i)^{-1}Z^i\}$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \|F(w^i, \lambda, \sigma^i, \mu)\| &\leq \|\nabla_x \mathcal{L}(w^i)\| + \|g(x^i) + \sigma^i(\lambda - y^i)\| + \|X^i Z^i e - \mu e\| \\ &\leq M_6(\|d_i^x\| + \|g(x^i) + \sigma^i(\lambda - y^i)\| + \|z^i - \mu(X^i)^{-1}e\|), \end{aligned}$$

où  $M_6$  est une constante positive. La convergence de  $\{F(w^i, \lambda, \sigma^i, \mu)\}$  vers zéro est donc obtenue en utilisant la dernière inégalité, le résultat (4.3.16) et la bornitude de la suite  $\{Z^i(X^i)^{-1}\}$ .  $\square$

### 4.3.2 Itérations externes

Avant d'analyser la convergence globale de l'algorithme 4.1, nous donnons le lemme suivant qui montre que si la condition (4.2.1) est satisfaite une infinité de fois, une sous-suite des itérés primaux devient asymptotiquement réalisable par rapport à la contrainte d'égalité.

**Lemme 4.3.3.** *Si la condition (4.2.1) est vérifiée une infinité de fois, alors, il existe une sous-suite de  $\{g(x_k)\}$  qui converge vers zéro.*

**Preuve.** Soit  $\mathcal{K}$  l'ensemble des indices des itérations au cours de lesquelles la condition (4.2.1) est satisfaite. Soit  $k \in \mathcal{K}$ . Alors, on a

$$\|g(x_k)\| \leq a \max \{\eta_{i_j} : (k - \ell)^+ \leq j \leq k\} \quad \text{et} \quad i_{k+1} = k.$$

En ajoutant  $\zeta_k$  aux deux membres de l'inégalité ci-dessus et en utilisant la définition de  $\eta_k$ , on obtient

$$\eta_{i_{k+1}} \leq a \max \{\eta_{i_j} : (k - \ell)^+ \leq j \leq k\} + \zeta_k.$$

Sachant que  $i_{k+1} = i_k$  pour  $k \notin \mathcal{K}$  et en définissant  $\beta_k = \eta_{i_k}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , le lemme 3.3.1 s'applique et par conséquent, la suite  $\{\eta_k\}_{k \in \mathcal{K}}$  converge vers zéro. Le résultat du lemme est donc obtenu en utilisant ceci et la définition de  $\eta_k$ .  $\square$

Pour étudier la convergence globale de l'algorithme des itérations externes, nous avons besoin des hypothèses suivantes.

**Hypothèse 4.3.4.** *Les suites  $\{\nabla f(x_k)\}$ ,  $\{\nabla g(x_k)\}$  et  $\{H_k\}$  sont bornées.*

**Hypothèse 4.3.5.** *Les matrices  $K(w_k, \delta_k)$  sont uniformément définies positives, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .*

**Hypothèse 4.3.6.** *La suite  $\{\tau_k\}$  est bornée inférieurement par une constante positive et la suite  $\{\mu_k^+\}$  est choisie telle que  $\limsup_{k \rightarrow \infty} \mu_k^+ / \mu_k < 1$ .*

L'hypothèse 4.3.6 garantit l'existence de  $\gamma \in ]0, 1[$  tel que  $\mu_k^+ \leq \gamma \mu_k$  pour tout  $k$  suffisamment grand. En utilisant ceci et la définition de  $\mu_{k+1}$  à l'étape 6 de l'algorithme 4.1, on a pour tout  $k$  suffisamment grand

$$\mu_{k+1} \leq (1 - (1 - \gamma)\alpha_k)\mu_k. \quad (4.3.17)$$

La convergence globale de l'algorithme 4.1 est analysée par le théorème suivant.

**Théorème 4.3.2.** *Soit  $\{w_k\}$  une suite infinie générée par l'algorithme 4.1. Alors, la suite  $\{F(w_k, \lambda_k, \sigma_k, \mu_k)\}$  converge vers zéro. En particulier, nous avons*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \nabla_x \mathcal{L}(w_k) = 0. \quad (4.3.18)$$

*En plus, si l'hypothèse 4.3.4 est vérifiée, alors, la suite des itérés primaux approche la stationnarité du problème d'infaisabilité associé au problème  $(P_{EI})$ , i.e. il existe une suite de vecteurs  $\{u_k\}$  qui vérifie*

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|\nabla g(x_k)g(x_k) - u_k\| = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} X_k u_k = 0, \quad x_k \geq 0 \quad \text{et} \quad u_k \geq 0. \quad (4.3.19)$$

*De plus, nous avons les trois résultats suivants.*

(i) *La suite  $\{y_k\}$  est non bornée. Dans ce cas, les itérés primaux s'approchent d'un échec de la condition de qualification MFCQ, i.e. il existe deux suites  $\{a_k\}$  et  $\{b_k\}$  telles que*

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|\nabla g(x_k)a_k - b_k\| = 0 \quad \text{et} \quad b_k \geq 0.$$

(ii) *La suite  $\{y_k\}$  est bornée. Dans ce cas, la suite  $\{g(x_k)\}$  converge vers zéro.*

(iii) *La suite  $\{g(x_k)\}$  est bornée. Dans ce cas, si les hypothèses 4.3.4-4.3.6 sont vérifiées et  $\delta_k = \Omega(\mu_k)$ , alors, la suite  $\{\mu_k\}$  converge vers zéro.*

**Preuve.** La convergence de la suite  $\{F(w_k, \lambda_k, \sigma_k, \mu_k)\}$  vers zéro découle directement de l'inégalité (4.2.6) et la convergence de  $\{\varepsilon_k\}$  vers zéro. Pour démontrer (4.3.19), nous distinguons deux cas.

*Cas 1.* L'étape 2 est exécutée une infinité de fois. Dans ce cas, l'inégalité (4.2.1) est vérifiée une infinité de fois et le lemme 4.3.3 implique qu'il existe une sous-suite de  $\{g(x_k)\}$  qui converge vers zéro. En utilisant ceci et la bornitude de  $\{\nabla g(x_k)\}$  et en choisissant  $u_k = 0$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , nous obtenons (4.3.19).

*Cas 2.* L'étape 2 est exécutée seulement un nombre fini de fois. Dans ce cas, il existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tel que l'étape 3 est exécutée à chaque itération  $k \geq k_0$  ce qui implique que  $\lambda_k = \lambda_{k_0}$  pour tout  $k \geq k_0$  et que la suite des paramètres de pénalisation  $\{\sigma_k\}$  converge vers zéro. Ce dernier résultat est obtenu en appliquant le lemme 3.2.1 du chapitre précédent. Définissons maintenant  $u_k := \sigma_k z_k$  pour tout  $k \geq k_0$ . Nous avons donc

$$\begin{aligned} \nabla g(x_k)g(x_k) - u_k &= \sigma_k(\nabla f(x_k) + \nabla g(x_k)y_k - z_k) - \sigma_k \nabla f(x_k) - \nabla g(x_k)(\sigma_k \lambda_{k_0}) \\ &\quad + \nabla g(x_k)(g(x_k) + \sigma_k(\lambda_{k_0} - y_k)). \end{aligned}$$

En prenant la norme des deux côtés, nous obtenons

$$\begin{aligned} \|\nabla g(x_k)g(x_k) - u_k\| &\leq \sigma_k \|\nabla_x \mathcal{L}(w_k)\| + \sigma_k \|\nabla f(x_k)\| + \|\nabla g(x_k)\| \|g(x_k) + \sigma_k(\lambda_{k_0} - y_k)\| \\ &\quad + \|\nabla g(x_k)\| \|\sigma_k \lambda_{k_0}\|. \end{aligned}$$

En utilisant ceci, l'hypothèse 4.3.4 et la convergence des suites  $\{\sigma_k\}$  et  $\{F(w_k, \lambda_k, \sigma_k, \mu_k)\}$  vers zéro, nous obtenons que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\nabla g(x_k)g(x_k) - u_k\| = 0$ . De plus, nous avons

$$\|X_k u_k\| \leq \sigma_k (\|X_k z_k - \mu_k e\| + \mu_k \|e\|),$$

ce qui implique que  $\lim_{k \rightarrow \infty} X_k u_k = 0$ . Enfin, le calcul de  $v_k$  à l'étape 5 de l'algorithme 4.1 garantit que  $x_k \geq 0$  et  $u_k \geq 0$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , ce qui termine la preuve de (4.3.19).

Démontrons maintenant le résultat (i) du théorème. Supposons qu'il existe  $\mathcal{K} \subset \mathbb{N}$  tel que la suite  $\{y_k\}_{\mathcal{K}}$  tend vers l'infini. Soit  $k \in \mathcal{K}$  et définissons  $a_k := y_k / \|(y_k, z_k)\|$  et  $b_k := z_k / \|(y_k, z_k)\|$ . En particulier, nous avons  $b_k \geq 0$ , d'après l'étape 5 de l'algorithme 4.1. Nous avons

$$\begin{aligned} \|\nabla g(x_k) a_k - b_k\| &= \frac{1}{\|(y_k, z_k)\|} \|\nabla g(x_k) y_k - z_k\| \\ &\leq \frac{1}{\|(y_k, z_k)\|} (\|\nabla_x \mathcal{L}(w_k)\| + \|\nabla f(x_k)\|). \end{aligned}$$

La suite  $\{\nabla_x \mathcal{L}(w_k)\}$  converge vers zéro et  $\{\nabla f(x_k)\}$  est bornée. Par conséquent, la suite  $\{\nabla g(x_k) a_k - b_k\}_{\mathcal{K}}$  converge vers zéro.

Pour la preuve du résultat (ii), nous distinguons deux cas.

*Cas 1.* L'étape 3 est exécutée une infinité de fois. Dans ce cas, la suite  $\{\sigma_k\}$  converge vers zéro. En utilisant ceci, la bornitude des suites  $\{y_k\}$  et  $\{\lambda_k\}$  et l'inégalité suivante

$$\|g(x_k)\| \leq \|g(x_k) + \sigma_k(\lambda_k - y_k)\| + \sigma_k(\|\lambda_k\| + \|y_k\|),$$

nous obtenons le résultat.

*Cas 2.* L'étape 3 est exécutée seulement un nombre fini de fois. Dans ce cas, l'inégalité (4.2.1) est vérifiée une infinité de fois et le lemme 4.3.3 implique que toute la suite  $\{g(x_k)\}$  converge vers zéro.

Démontrons le résultat (iii). Supposons que la suite  $\{g(x_k)\}$  est bornée. La preuve de convergence de  $\{\mu_k\}$  vers zéro est basée sur celle du [13, Théorème 3.3]. Le raisonnement est par contradiction, en supposant que  $\{\mu_k\}$  converge vers  $\bar{\mu} > 0$ . En utilisant ceci, l'inégalité (4.3.17) implique que  $\alpha_k \rightarrow 0$ . Le reste de la preuve consiste à établir qu'il existe  $\bar{\alpha} > 0$  tel que  $\alpha_k \geq \bar{\alpha}$  pour tout  $k$  suffisamment grand. Pour se faire, il suffit de démontrer que le pas de Newton, calculé à l'étape 4 de l'algorithme 4.1, est borné. La conclusion contradictoire à notre hypothèse suivra ensuite à partir de l'inégalité

$$\frac{\bar{\tau}}{1 + \|w_k^+ - w_k\|/\sqrt{\bar{\mu}}} \leq \alpha_k, \quad (4.3.20)$$

pour tout  $k$  suffisamment grand, où  $\bar{\tau} := \inf \tau_k > 0$ . Ici, l'inégalité (4.3.20) est obtenue en utilisant les mêmes outils développés dans [13, Preuve du Théorème 3.3 (Équation (26))].

Sachant que  $\delta_k = \Omega(\mu_k)$  et en utilisant notre hypothèse sur la convergence de  $\{\mu_k\}$ , nous déduisons que la suite  $\{\delta_k\}$  est bornée inférieurement par une constante positive. En utilisant ceci et en appliquant [9, Théorème 1], nous obtenons

$$\|J(w_k, \delta_k)^{-1}\| \leq K_1, \quad (4.3.21)$$

pour tout  $k \geq 0$  pour une constante positive  $K_1$ . D'autre part, la définition (4.1.13) donne

$$\begin{aligned}
 F(w_k, \lambda_{k+1}, \sigma_k^+, \mu_k^+) &= F_0(w_k) + \sigma_k^+ \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_{k+1} - y_k \\ 0 \end{pmatrix} - \mu_k^+ \tilde{e} \\
 &= F_0(w_k) + \sigma_k \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_k - y_k \\ 0 \end{pmatrix} - \mu_k \tilde{e} - \sigma_k \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_k - y_k \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_k \tilde{e} \\
 &\quad + \sigma_k^+ \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_{k+1} - y_k \\ 0 \end{pmatrix} - \mu_k^+ \tilde{e} \\
 &= F(w_k, \lambda_k, \sigma_k, \mu_k) - \sigma_k \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_k - y_k \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma_k^+ \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_{k+1} - y_k \\ 0 \end{pmatrix} + (\mu_k - \mu_k^+) \tilde{e}.
 \end{aligned}$$

En utilisant ceci, (4.2.2) et (4.3.21), nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \|w_k^+ - w_k\| &\leq \|J(w_k, \delta_k)^{-1}\| \|F(w_k, \lambda_{k+1}, \sigma_k^+, \mu_k^+)\| \\
 &\leq K_1 (\|F(w_k, \lambda_k, \sigma_k, \mu_k)\| + \sigma_k \|\lambda_k - y_k\| + \sigma_k^+ \|\lambda_{k+1} - y_k\| + |\mu_k - \mu_k^+| \|\tilde{e}\|).
 \end{aligned} \tag{4.3.22}$$

Or, d'après les étapes 2 et 3 de l'algorithme 4.1, on a  $\sigma_k^+ \leq \sigma_k$  et  $\lambda_{k+1} = y_k$  ou  $\lambda_{k+1} = \lambda_k$ . En utilisant ceci, il découle que

$$\sigma_k^+ \|\lambda_{k+1} - y_k\| \leq \sigma_k \|\lambda_k - y_k\|,$$

pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . En remplaçant cette relation dans l'inégalité (4.3.22), nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \|w_k^+ - w_k\| &\leq K_1 (\|F(w_k, \lambda_k, \sigma_k, \mu_k)\| + 2\sigma_k \|\lambda_k - y_k\| + |\mu_k - \mu_k^+| \|\tilde{e}\|) \\
 &\leq K_1 (\|F(w_k, \lambda_k, \sigma_k, \mu_k)\| + 2\|g(x_k)\| + 2\|g(x_k) + \sigma_k(\lambda_k - y_k)\| \\
 &\quad + |\mu_k - \mu_k^+| \|\tilde{e}\|).
 \end{aligned} \tag{4.3.23}$$

Puisque les suites  $\{\|F(w_k, \lambda_k, \sigma_k, \mu_k)\|\}$  et  $\{\|g(x_k) + \sigma_k(\lambda_k - y_k)\|\}$  convergent vers zéro, elles sont bornées. L'hypothèse 4.3.6 et la convergence de  $\{\mu_k\}$  vers  $\bar{\mu}$  garantissent que  $\{|\mu_k - \mu_k^+|\}$  est encore bornée. La suite  $\{\|g(x_k)\|\}$  est bornée par hypothèse. En utilisant tous ces arguments, il découle de (4.3.23) que

$$\|w_k^+ - w_k\| \leq K_2,$$

pour tout  $k \geq 0$  pour une constante positive  $K_2$ . Ceci termine la preuve de (iii) et par suite celle du théorème.  $\square$

**Remarque 4.3.1.** Il est clair que le résultat (ii) du théorème 4.3.2 implique le résultat (iii). L'inverse n'est pas vrai. Il suffit de considérer un problème d'optimisation non réalisable avec des contraintes bornées.

**Remarque 4.3.2.** Supposons que la suite  $\{y_k\}$  est bornée, que les hypothèses 4.3.4-4.3.6 soient vérifiées et que  $\delta_k = \Omega(\mu_k)$ , alors l'algorithme 4.1 converge vers un point qui satisfait les conditions d'optimalité du premier ordre du problème initial. En effet, la convergence de  $\{\nabla_x \mathcal{L}(w_k)\}$  et  $\{g(x_k)\}$  découle respectivement de (4.3.18) et du résultat (ii) du théorème. La convergence de  $\{X_k Z_{k,e}\}$  vers zéro découle de celle de  $\{X_k Z_{k,e} - \mu_k e\}$ , le troisième block de  $\{F(w_k, \lambda_k, \sigma_k, \mu_k)\}$ , et  $\{\mu_k\}$ .

## 4.4 Convergence asymptotique

Cette section est consacrée à l'analyse du comportement asymptotique d'une suite convergente générée par l'algorithme 4.1. Sous des conditions convenables, nous montrons que le taux de convergence de cette suite vers la solution est le même que celui de la suite  $\{\mu_k\}$  vers zéro et que la méthode proposée se réduit asymptotiquement à la méthode de Newton régularisée appliquée aux conditions d'optimalité du premier ordre du problème barrière.

Dans toute la suite, il est supposé que l'algorithme 4.1 génère une suite convergente  $\{w_k\}$  vers une solution primale-duale  $w^*$  de  $(P_{EI})$ . Une conséquence directe de cette hypothèse est la convergence de la suite  $\{\lambda_k\}$  vers  $y^*$ . La preuve de ce résultat a été donnée dans le chapitre précédent (Lemme 3.4.1).

### 4.4.1 Hypothèses et résultats préliminaires

Tout au long de cette étude, les hypothèses standards suivantes seront utilisées.

**Hypothèse 4.4.1.** *Les fonctions  $f$  et  $g$  sont deux fois continûment différentiables dans un voisinage de  $x^*$  et leur dérivées secondes sont continûment lipschitziennes.*

**Hypothèse 4.4.2.** *L'hypothèse LICQ est satisfaite en  $x^*$ .*

**Hypothèse 4.4.3.** *L'hypothèse SOSC est satisfaite en  $w^*$ .*

**Hypothèse 4.4.4.** *L'hypothèse SC est satisfaite en  $w^*$ .*

Notre analyse asymptotique de l'algorithme 4.1 est motivée par le résultat du théorème 4.1.1. Ce dernier implique qu'une solution  $x^*$  du problème  $(P_{EI})$  peut être obtenue en fixant la valeur de  $\sigma$  et en conduisant  $\mu$  vers zéro. Par conséquent, il suffit de considérer la trajectoire, dépendant d'un seul paramètre<sup>11</sup>,  $w(\mu) := (x(\mu), y(\mu), z(\mu))$ . Cette dernière correspond à la solution du système (4.1.5). Dans toute la suite, nous supposons que  $\mu$  converge vers zéro et que  $\sigma$  est suffisamment petit tel que le résultat du théorème 4.1.1 est vrai. Dans le lemme suivant, nous donnons les propriétés du chemin central  $w(\mu)$ .

**Lemme 4.4.1.** *Supposons que les hypothèses 4.4.1-4.4.4 soient satisfaites. Alors, il existe  $\delta^* > 0$ ,  $\mu^* > 0$  et une fonction continûment différentiable  $w(\cdot) : ]-\mu^*, \mu^*[ \rightarrow \mathbb{R}^N$  tels que pour tout  $w \in \mathcal{B}(w^*, \delta^*)$  et  $\mu \in ]-\mu^*, \mu^*[$ ,*

$$F_0(w) = \mu \tilde{e} \quad \text{si et seulement si} \quad w = w(\mu).$$

*De plus, il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $\mu, \mu' \in ]-\mu^*, \mu^*[$ ,*

$$\|w(\mu) - w(\mu')\| \leq C|\mu - \mu'|.$$

11. Sous les hypothèses 4.4.1-4.4.4, les conditions d'optimalité perturbées (4.1.11) définissent deux trajectoires dont chacune dépend de deux paramètres. La première trajectoire dépend de  $\lambda$  et  $\mu$  et la deuxième dépend de  $\sigma$  et  $\mu$ . Cette deuxième trajectoire a été utilisée dans une première version de ce travail sans pouvoir démontrer les résultats voulus. La découverte du théorème 4.1.1 nous a permis de faciliter cette analyse en remarquant qu'une trajectoire qui dépend seulement de  $\mu$ , indépendamment de  $\sigma$ , suffit pour récupérer une solution du problème initial.

En outre, nous avons

$$w(\mu) = w^* + w'(0)\mu + o(\mu). \quad (4.4.1)$$

Enfin, nous avons pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$

$$[x^*]_i[z'(0)]_i + [x'(0)]_i[z^*]_i = 1. \quad (4.4.2)$$

**Preuve.** Le premier résultat a été démontré dans le théorème 4.1.1. La preuve du deuxième résultat est obtenu en appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction continûment différentiable  $w(\cdot)$  et en posant  $C = \sup \|w'(t)\|$ , pour tout  $t \in ]-\mu^*, \mu^*]$ . Le troisième résultat est exactement le développement de Taylor de  $w(\cdot)$  autour de  $\mu = 0$ . Concernant l'équation (4.4.2), elle est obtenue comme suit. D'après (4.4.1), nous avons

$$[x(\mu)]_i = [x^*]_i + \mu[x'(0)]_i + o(\mu) \quad \text{et} \quad [z(\mu)]_i = [z^*]_i + \mu[z'(0)]_i + o(\mu).$$

En multipliant ces deux quantités et en utilisant le fait que  $[x^*]_i[z^*]_i = 0$  et  $F_0(w(\mu)) = \mu\tilde{e}$ , nous obtenons

$$[x(\mu)]_i[z(\mu)]_i = ([x^*]_i[z'(0)]_i + [x'(0)]_i[z^*]_i)\mu + o(\mu).$$

Le résultat (4.4.2) découle en divisant les deux côtés de l'égalité par  $\mu$  et en prenant la limite lorsque  $\mu$  tend vers zéro.  $\square$

Afin de démontrer la convergence superlinéaire, des hypothèses additionnelles sont nécessaires. Elles concernent le choix des suites  $\{H_k\}$ ,  $\{\mu_k^+\}$ ,  $\{\sigma_k\}$ ,  $\{\delta_k\}$  et  $\{\tau_k\}$ . En particulier, il est demandé que la matrice  $H_k$  soit suffisamment proche de la matrice hessienne du lagrangien et que  $\{\delta_k\}$  et  $\{\sigma_k\}$  convergent vers 0.

**Hypothèse 4.4.5.** Il existe  $\beta > 0$  tel que

$$\|\nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(w_k) - H_k\| \leq \beta\delta_k. \quad (4.4.3)$$

**Hypothèse 4.4.6.** La suite  $\{\mu_k^+\}$  vérifie pour tout entier  $k$ ,

$$\theta'\mu_k^{1+t} \leq \mu_k^+ \leq \theta\mu_k, \quad (4.4.4)$$

pour des constantes  $\theta, t \in (0, 1)$  et  $\theta' > 0$ .

L'hypothèse 4.4.6 est tout à fait standard pour étudier la convergence asymptotique des méthodes de points intérieurs. En utilisant l'inégalité de gauche de l'expression (4.4.4) et le fait que la suite  $\{\mu_k\}$  converge vers zéro, nous obtenons que

$$\mu_k^2 = o(\mu_k^+). \quad (4.4.5)$$

De plus, l'hypothèse 4.4.6 et la définition de  $\mu_{k+1}$  à l'étape 6 de l'algorithme 4.1 implique que

$$\mu_k^+ \leq \mu_{k+1}. \quad (4.4.6)$$

L'hypothèse suivante est nécessaire pour établir des estimations de la distance des itérés au chemin central qui ne dépendent que de  $\mu_k$ . Elle est encore utilisée pour démontrer que l'algorithme 4.1 n'a plus besoin asymptotiquement des itérations internes.

**Hypothèse 4.4.7.** *La suite  $\{\sigma_k\}$  est choisie telle que  $\sigma_k = O(\mu_k)$ .*

**Hypothèse 4.4.8.** *La suite  $\{\delta_k\}$  est choisie telle que  $\delta_k = O(\mu_k)$ .*

D'après le théorème de convergence globale 4.3.2, le choix du paramètre de régularisation  $\delta_k$  doit satisfaire  $\delta_k = \Omega(\mu_k)$ . Par conséquent, l'hypothèse 4.4.8 implique que

$$\delta_k = \Theta(\mu_k).$$

La dernière hypothèse concerne le choix de  $\tau_k$ . Elle implique que  $\{\tau_k\}$  converge vers 1.

**Hypothèse 4.4.9.** *La suite  $\{\tau_k\}$  est choisie telle que*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (1 - \tau_k) \frac{\mu_k}{\mu_k^+} = 0.$$

Dans toute la suite, nous supposons que les hypothèses 4.4.1-4.4.9 soient satisfaites. Le lemme suivant donne une estimation de la distance de l'itéré de Newton au chemin central.

**Lemme 4.4.2.** *Il existe une constante  $M > 0$  telle que pour tout  $w_k \in \mathcal{B}(w^*, \delta^*)$  et  $\mu_k \leq \mu^*$ , la suite générée par l'algorithme 4.1 vérifie*

$$\|w_k^+ - w(\mu_k^+)\| \leq M(\|w_k - w(\mu_k)\|^2 + \delta_k^2 + \mu_k^2 + \sigma_k^+ \|\lambda_{k+1} - y_k\|). \quad (4.4.7)$$

**Preuve.** La preuve est basée sur celle du [13, Lemme 4.11]. Soit  $k$  suffisamment grand tel que le lemme 4.4.1 s'applique. Notons par  $J_k := J(w_k, \delta_k)$ . Nous commençons cette preuve par noter que

$$\|J_k^{-1}\| \leq 2K, \quad (4.4.8)$$

pour une constante positive  $K$ . Ceci peut se démontrer de la même manière que celle du lemme 3.4.2-(iii) du chapitre 3. D'après l'étape 4 de l'algorithme 4.1, nous avons

$$\begin{aligned} w_k^+ - w(\mu_k^+) &= -J_k^{-1} F(w_k, \lambda_{k+1}, \sigma_k^+, \mu_k^+) - w(\mu_k^+) + w_k \\ &= J_k^{-1} \left( -F_0(w_k) - \sigma_k^+ \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_{k+1} - y_k \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_k^+ \tilde{e} - J_k(w(\mu_k^+) - w_k) \right) \\ &= J_k^{-1} (-F_0(w_k) + \mu_k^+ \tilde{e} - F'_0(w_k)(w(\mu_k^+) - w_k)) \\ &\quad + J_k^{-1} (F'_0(w_k) - J_k)(w(\mu_k^+) - w_k) - \sigma_k^+ J_k^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_{k+1} - y_k \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= J_k^{-1} \int_0^1 (F'_0(w_k + t(w(\mu_k^+) - w_k)) - F'_0(w_k))(w(\mu_k^+) - w_k) dt \\ &\quad + J_k^{-1} (F'_0(w_k) - J_k)(w(\mu_k^+) - w_k) - \sigma_k^+ J_k^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_{k+1} - y_k \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

#### 4.4. Convergence asymptotique

En prenant la norme des deux côtés et en utilisant (4.4.3), (4.4.8) et le fait que  $F'_0$  est localement lipschitzienne avec une constante de Lipschitz  $L > 0$ , nous obtenons

$$\|w_k^+ - w(\mu_k^+)\| \leq KL\|w_k - w(\mu_k^+)\|^2 + 2K\delta_k \max\{\beta, 1\}\|w_k - w(\mu_k^+)\| + 2K\sigma_k^+\|\lambda_{k+1} - y_k\|. \quad (4.4.9)$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} \|w_k - w(\mu_k^+)\| &\leq \|w_k - w(\mu_k)\| + \|w(\mu_k) - w(\mu_k^+)\| \\ &\leq \|w_k - w(\mu_k)\| + C\mu_k. \end{aligned}$$

En substituant ceci dans (4.4.9) et en utilisant les deux inégalités  $(c + d)^2 \leq 2(c^2 + d^2)$  et  $cd \leq \frac{1}{2}(c^2 + d^2)$ , pour deux nombres réels  $c$  et  $d$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \|w_k^+ - w(\mu_k^+)\| &= O((\|w_k - w(\mu_k)\| + \mu_k)^2) + O(\delta_k(\mu_k + \|w_k - w(\mu_k)\|)) \\ &\quad + O(\sigma_k^+\|\lambda_{k+1} - y_k\|). \\ &= O(\|w_k - w(\mu_k)\|^2) + O(\delta_k^2) + O(\mu_k^2) + O(\sigma_k^+\|\lambda_{k+1} - y_k\|). \end{aligned}$$

Ceci termine la preuve du lemme.  $\square$

Puisque la suite  $\{w_k\}$  converge vers  $w^*$ , le lemme 4.4.2 implique que les suites  $\{w_k^+\}$  et  $\{\widehat{w}_k\}$  convergent vers  $w^*$ . De plus, il existe un entier  $k_0 \in \mathbb{N}$  et  $0 < \bar{\delta} < \min\{\delta^*, b\}$ , où la constante  $b$  est donnée dans la définition 1.3.4, tels que pour tout  $k \geq k_0$ , on a

$$w_k, w_{k+1}, w(\mu_k), w(\mu_k^+) \in \mathcal{B}(w^*, \bar{\delta}) \quad \text{et} \quad \mu_k, \mu_k^+, \mu_{k+1} \in ]0, \mu^*].$$

Nous supposons, sans perte de généralité, que ces résultats sont vrais pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

Le lemme suivant donne une estimation d'une borne inférieure de la longueur du pas calculé à l'étape 5 de l'algorithme 4.1 en appliquant la règle de la fraction du déplacement à la frontière. Ce résultat a été démontré par Armand et Benoist [8, Corollaire 1].

**Lemme 4.4.3.** *Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , la longueur du pas  $\alpha_k$  vérifie*

$$1 - \alpha_k \leq 1 - \tau_k + b'\|w_k - w_k^+\|, \quad (4.4.10)$$

$$\text{où } b' := \frac{1}{b - \bar{\delta}} > 0.$$

#### 4.4.2 Résultats asymptotiques

Les résultats donnés dans cette sous-section sont une adaptation de ceux de Armand et Benoist [8] et Armand, Benoist et Orban [13]. Dans le lemme suivant, nous établissons une estimation de la distance de l'itéré  $w_{k+1}$  au chemin central.

**Lemme 4.4.4.** *Il existe une constante  $c_1 > 0$  telle que*

$$\|w_{k+1} - w(\mu_{k+1})\| \leq c_1 (\|\widehat{w}_k - w(\mu_{k+1})\| + \sigma_{k+1}(\|\lambda_{k+1} - y_{k+1}\| + \|\lambda_{k+1} - \widehat{y}_k\|)). \quad (4.4.11)$$



**Preuve.** Puisque la matrice  $F'_0(w^*)$  est inversible, l'application du [48, Lemme 4.1.16] montre l'existence de deux constantes  $L_2 > L_1 > 0$  telles que pour tout  $w, w' \in \mathcal{B}(w^*, \bar{\delta})$ , on a

$$L_1 \|w - w'\| \leq \|F_0(w) - F_0(w')\| \leq L_2 \|w - w'\|. \quad (4.4.12)$$

Pour démontrer (4.4.11), nous distinguons deux cas. Le premier est lorsqu'il n'y a pas d'itérations internes. Nous avons donc  $w_{k+1} = \widehat{w}_k$  et l'inégalité (4.4.11) est trivialement vraie. Le deuxième cas est lorsque l'itéré  $w_{k+1}$  est calculé en appliquant une suite d'itérations internes puisque le test d'arrêt (4.2.5) n'est pas satisfait. En utilisant ceci, (4.4.12), le lemme 4.4.1 et le fait que  $\sigma_{k+1} \geq \sigma_k^+$ , il existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $k \geq k_0$ , on a

$$\begin{aligned} L_2 \|\widehat{w}_k - w(\mu_{k+1})\| &\geq \|F_0(\widehat{w}_k) - F_0(w(\mu_{k+1}))\| \\ &= \|F_0(\widehat{w}_k) - \mu_{k+1}\tilde{e}\| \\ &\geq \|F_0(\widehat{w}_k) + \sigma_k^+ \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_{k+1} - \widehat{y}_k \\ 0 \end{pmatrix} - \mu_{k+1}\tilde{e}\| - \sigma_k^+ \|\lambda_{k+1} - \widehat{y}_k\| \\ &> \varepsilon_k - \sigma_k^+ \|\lambda_{k+1} - \widehat{y}_k\| \\ &\geq \|F_0(w_{k+1}) + \sigma_{k+1} \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_{k+1} - y_{k+1} \\ 0 \end{pmatrix} - \mu_{k+1}\tilde{e}\| - \sigma_k^+ \|\lambda_{k+1} - \widehat{y}_k\| \\ &\geq \|F_0(w_{k+1}) - F_0(w(\mu_{k+1}))\| - \sigma_{k+1} \|\lambda_{k+1} - y_{k+1}\| - \sigma_k^+ \|\lambda_{k+1} - \widehat{y}_k\| \\ &\geq L_1 \|w_{k+1} - w(\mu_{k+1})\| - \sigma_{k+1} (\|\lambda_{k+1} - y_{k+1}\| + \|\lambda_{k+1} - \widehat{y}_k\|). \end{aligned}$$

Le résultat du lemme est donc obtenu en posant  $c_1 = \max\{\frac{L_2}{L_1}, \frac{1}{L_1}\}$  pour tout  $k \geq k_0$  et en prenant  $c_1 > \max\{\frac{L_2}{L_1}, \frac{1}{L_1}\}$  pour tout  $k < k_0$ .  $\square$

Soit  $\gamma' \in (0, 1)$  telle que  $\gamma'\theta < 1$  où  $\theta$  est définie dans l'hypothèse 4.4.6. Le lemme technique suivant donne une relation entre les deux suites  $\{\|w_k - w(\mu_k)\|\}$  et  $\{\mu_k\}$ .

**Lemme 4.4.5.** *Il existe deux constantes positives  $c$  et  $d$  telles que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a*

$$d_{k+1} \leq d_k^2 + \gamma' \frac{\mu_{k+1}}{\mu_k} d_k + c\mu_{k+1}, \quad (4.4.13)$$

où  $d_k := d\|w_k - w(\mu_k)\|$ .

**Preuve.** La preuve utilise des arguments similaires à ceux de [8, Lemme 6] et [13, Lemme 4.14]. Soit  $k \in \mathbb{N}$ . En utilisant les lemmes 4.4.1 et 4.4.4, nous obtenons

$$\begin{aligned} c_1^{-1} \|w_{k+1} - w(\mu_{k+1})\| &\leq \|\widehat{w}_k - w(\mu_k^+)\| + \|w(\mu_k^+) - w(\mu_{k+1})\| \\ &\quad + \sigma_{k+1} (\|\lambda_{k+1} - y_{k+1}\| + \|\lambda_{k+1} - \widehat{y}_k\|) \\ &\leq \|\widehat{w}_k - w(\mu_k^+)\| + C|\mu_k^+ - \mu_{k+1}| \\ &\quad + \sigma_{k+1} (\|\lambda_{k+1} - y_{k+1}\| + \|\lambda_{k+1} - \widehat{y}_k\|). \end{aligned} \quad (4.4.14)$$

#### 4.4. Convergence asymptotique

En utilisant la définition de  $\mu_{k+1}$  et l'inégalité (4.4.10), nous obtenons

$$\begin{aligned} |\mu_k^+ - \mu_{k+1}| &= (1 - \alpha_k)(\mu_k - \mu_k^+) \\ &\leq (1 - \alpha_k)\mu_k \\ &\leq (1 - \tau_k + b'\|w_k - w_k^+\|)\mu_k. \end{aligned} \quad (4.4.15)$$

En utilisant la définition de  $\widehat{w}_k$  à l'étape 6 de l'algorithme 4.1, nous avons

$$\widehat{w}_k - w(\mu_k^+) = a_k \circ (w_k^+ - w(\mu_k^+)) + (e - a_k) \circ (w_k - w(\mu_k^+)).$$

En prenant la norme des deux côtés, en remarquant que  $\|a_k\|_\infty \leq 1$  et que  $\|e - a_k\|_\infty \leq 1 - \alpha_k$ , en appliquant les lemmes 4.4.1 et 4.4.2 et enfin en utilisant la relation (4.4.10), nous obtenons

$$\begin{aligned} \|\widehat{w}_k - w(\mu_k^+)\| &\leq \|a_k\|_\infty \|w_k^+ - w(\mu_k^+)\| + \|e - a_k\|_\infty \|w_k - w(\mu_k^+)\| \\ &\leq \|w_k^+ - w(\mu_k^+)\| + (1 - \alpha_k)\|w_k - w(\mu_k^+)\| \\ &\leq \|w_k^+ - w(\mu_k^+)\| + (1 - \alpha_k)(\|w_k - w(\mu_k)\| + C\mu_k) \\ &\leq M(\|w_k - w(\mu_k)\|^2 + \delta_k^2 + \mu_k^2 + \sigma_k^+ \|\lambda_{k+1} - y_k\|) \\ &\quad + (1 - \tau_k + b'\|w_k - w_k^+\|)(\|w_k - w(\mu_k)\| + C\mu_k). \end{aligned} \quad (4.4.16)$$

En utilisant les lemmes 4.4.1 et 4.4.2, nous avons encore

$$\begin{aligned} \|w_k - w_k^+\| &\leq \|w_k - w(\mu_k)\| + \|w(\mu_k) - w(\mu_k^+)\| + \|w(\mu_k^+) - w_k^+\| \\ &\leq \|w_k - w(\mu_k)\| + C\mu_k \\ &\quad + M(\|w_k - w(\mu_k)\|^2 + \delta_k^2 + \mu_k^2 + \sigma_k^+ \|\lambda_{k+1} - y_k\|). \end{aligned} \quad (4.4.17)$$

En substituant (4.4.15), (4.4.16) et (4.4.17) dans (4.4.14), nous obtenons

$$\begin{aligned} c_1^{-1} \|w_{k+1} - w(\mu_{k+1})\| &\leq (M + b'(1 + 2C\mu_k + M\|w_k - w(\mu_k)\|))\|w_k - w(\mu_k)\|^2 \\ &\quad + (1 - \tau_k + b'(3C\mu_k + M\mu_k^2))\|w_k - w(\mu_k)\| \\ &\quad + 2C(1 - \tau_k)\mu_k + 2b'C^2\mu_k^2 + M(1 + 2b'C\mu_k)\mu_k^2 \\ &\quad + M(1 + 2b'C\mu_k + b'\|w_k - w(\mu_k)\|)(\delta_k^2 + \sigma_k^+ \|\lambda_{k+1} - y_k\|) \\ &\quad + \sigma_{k+1}(\|\lambda_{k+1} - y_{k+1}\| + \|\lambda_{k+1} - \widehat{y}_k\|). \end{aligned} \quad (4.4.18)$$

Soit  $\theta_k := M(1 + 2b'C\mu_k + b'\|w_k - w(\mu_k)\|)$ . En utilisant le fait que

$$\|w_k - w(\mu_k)\| \leq 2\bar{\delta}. \quad (4.4.19)$$

et que  $\mu_k \leq \mu^*$ , nous obtenons que  $\theta_k \leq M(1 + 2b'(C\mu^* + \bar{\delta}))$ , pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . En utilisant ceci et la convergence des suites  $\{\lambda_k\}$ ,  $\{y_k\}$  et  $\{\widehat{y}_k\}$  vers  $y^*$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} &\theta_k(\delta_k^2 + \sigma_k^+ \|\lambda_{k+1} - y_k\|) + \sigma_{k+1}(\|\lambda_{k+1} - y_{k+1}\| + \|\lambda_{k+1} - \widehat{y}_k\|) \\ &= O(\delta_k^2 + \sigma_k^+ \|\lambda_{k+1} - y_k\|) + O(\sigma_{k+1}(\|\lambda_{k+1} - y_{k+1}\| + \|\lambda_{k+1} - \widehat{y}_k\|)) \\ &= O(\delta_k^2) + o(\sigma_k^+) + o(\sigma_{k+1}) \\ &= O(\delta_k^2) + o(\sigma_{k+1}). \end{aligned}$$

La dernière inégalité découle de la définition de  $\sigma_{k+1}$  à l'étape 7 de l'algorithme 4.1. En utilisant ceci, (4.4.5) et (4.4.18) et l'hypothèse 4.4.9, nous déduisons que

$$c_1^{-1} \|w_{k+1} - w(\mu_{k+1})\| \leq c_2 \|w_k - w(\mu_k)\|^2 + o\left(\frac{\mu_k^+}{\mu_k}\right) \|w_k - w(\mu_k)\| + o(\mu_k^+) + O(\delta_k^2) + o(\sigma_{k+1}),$$

où  $c_2 := M + b'(1 + 2C(\mu^* + M\bar{\delta}))$ . En utilisant maintenant (4.4.6) et les hypothèses 4.4.7 et 4.4.8, nous obtenons

$$\|w_{k+1} - w(\mu_{k+1})\| \leq c_1 c_2 \|w_k - w(\mu_k)\|^2 + o\left(\frac{\mu_{k+1}}{\mu_k}\right) \|w_k - w(\mu_k)\| + o(\mu_{k+1}).$$

En multipliant les deux côtés de l'inégalité par  $d := c_1 c_2$ , nous concluons que

$$d_{k+1} \leq d_k^2 + \gamma \frac{\mu_{k+1}}{\mu_k} d_k + o(\mu_{k+1}),$$

pour tout  $k$  suffisamment grand. L'inégalité (4.4.13) est donc obtenue en prenant une constante  $c > 0$  suffisamment grande.  $\square$

Dans le lemme suivant, nous donnons une propriété fondamentale de la distance des itérés générés par l'algorithme 4.1 au chemin central. La preuve de ce résultat est une conséquence directe du lemme 4.4.5 et du [8, Lemme 7].

**Lemme 4.4.6.** *Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , nous avons*

$$\|w_k - w(\mu_k)\| = O(\mu_k).$$

**Lemme 4.4.7.** *L'itéré de Newton  $w_k^+$  calculé à l'étape 4 de l'algorithme 4.1 vérifie*

$$w_k^+ = w(\mu_k^+) + o(\mu_k^+) + o(\sigma_k^+).$$

**Preuve.** Puisque les suites  $\{\lambda_k\}$  et  $\{y_k\}$  convergent vers  $y^*$ , nous avons  $\sigma_k^+ \|\lambda_{k+1} - y_k\| = o(\sigma_k^+)$ . En utilisant ceci, les lemmes 4.4.2 et 4.4.6, l'hypothèse 4.4.8 et la relation (4.4.5), nous déduisons

$$\begin{aligned} \|w_k^+ - w(\mu_k^+)\| &\leq M (\|w_k - w(\mu_k)\|^2 + \delta_k^2 + \mu_k^2 + \sigma_k^+ \|\lambda_{k+1} - y_k\|) \\ &= O(\mu_k^2) + O(\delta_k^2) + o(\sigma_k^+) \\ &= o(\mu_k^+) + o(\sigma_k^+). \end{aligned}$$

$\square$

**Lemme 4.4.8.** *L'itéré de Newton  $w_k^+$  calculé à l'étape 4 de l'algorithme 4.1 vérifie*

$$\|w_k - w_k^+\| = O(\mu_k). \quad (4.4.20)$$

**Preuve.** Le résultat découle de l'application des lemmes 4.4.1, 4.4.6 et 4.4.7, la relation (4.4.6), l'hypothèse 4.4.6, l'inégalité  $\sigma_k^+ \leq \sigma_{k+1}$ , et la définition de  $\mu_{k+1}$  à l'étape 6 de l'algorithme 4.1. En effet, nous avons

$$\begin{aligned} \|w_k - w_k^+\| &\leq \|w_k - w(\mu_k)\| + \|w(\mu_k) - w(\mu_k^+)\| + \|w(\mu_k^+) - w_k^+\| \\ &\leq O(\mu_k) + C|\mu_k - \mu_k^+| + o(\mu_k^+) + o(\sigma_k^+) \\ &= O(\mu_k) + o(\mu_{k+1}) + o(\sigma_{k+1}) \\ &= O(\mu_k) + o(\mu_{k+1}) \\ &= O(\mu_k). \end{aligned}$$

$\square$

#### 4.4. Convergence asymptotique

---

Le lemme suivant montre que les itérés  $\widehat{w}_k$  sont asymptotiquement tangents au chemin central. Sa preuve est obtenue en adaptant celle de [13, Lemme 4.17] à ce cadre d'étude.

**Lemme 4.4.9.** *L'itéré  $\widehat{w}_k$  calculé à l'étape 6 de l'algorithme 4.1 vérifie*

$$\widehat{w}_k = w(\mu_{k+1}) + o(\mu_{k+1}).$$

**Preuve.** Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Le développement de Taylor (4.4.1) et la définition de  $\mu_{k+1}$  donnent

$$\begin{aligned} w(\mu_{k+1}) &= w^* + w'(0)\mu_{k+1} + o(\mu_{k+1}) \\ &= \alpha_k(w^* + w'(0)\mu_k^+) + (1 - \alpha_k)(w^* + w'(0)\mu_k) + o(\mu_{k+1}) \\ &= \alpha_k(w(\mu_k^+) + o(\mu_k^+)) + (1 - \alpha_k)(w(\mu_k) + o(\mu_k)) + o(\mu_{k+1}) \\ &= \alpha_k w(\mu_k^+) + (1 - \alpha_k)w(\mu_k) + o(\alpha_k \mu_k^+ + (1 - \alpha_k)\mu_k) + o(\mu_{k+1}) \\ &= \alpha_k w(\mu_k^+) + (1 - \alpha_k)w(\mu_k) + o(\mu_{k+1}). \end{aligned}$$

En utilisant la définition de  $\widehat{w}_k$  à l'étape 6 de l'algorithme 4.1, nous obtenons

$$\begin{aligned} \widehat{w}_k - w(\mu_{k+1}) &= a_k \circ w_k^+ + (e - a_k) \circ w_k - w(\mu_{k+1}) \\ &= a_k \circ (w_k^+ - w(\mu_k^+)) + (e - a_k) \circ (w_k - w(\mu_k)) \\ &\quad + (a_k - \alpha_k e) \circ (w(\mu_k^+) - w(\mu_k)) + o(\mu_{k+1}). \end{aligned}$$

En prenant la norme des deux côtés, en utilisant  $\|a_k\|_\infty \leq 1$ ,  $\|e - a_k\|_\infty \leq 1 - \alpha_k$ ,  $\|a_k - \alpha_k e\|_\infty \leq 1 - \alpha_k$ , le lemme 4.4.1 et l'inégalité (4.4.4) et enfin en appliquant les lemmes 4.4.6 et 4.4.7, nous déduisons

$$\begin{aligned} \|\widehat{w}_k - w(\mu_{k+1})\| &\leq \|a_k\|_\infty \|w_k^+ - w(\mu_k^+)\| + \|e - a_k\|_\infty \|w_k - w(\mu_k)\| \\ &\quad + \|a_k - \alpha_k e\|_\infty \|w(\mu_k^+) - w(\mu_k)\| + o(\mu_{k+1}) \\ &\leq \|w_k^+ - w(\mu_k^+)\| + (1 - \alpha_k) \|w_k - w(\mu_k)\| \\ &\quad + O((1 - \alpha_k)\mu_k) + o(\mu_{k+1}) \\ &= o(\mu_k^+) + o(\sigma_k^+) + O((1 - \alpha_k)\mu_k) + o(\mu_{k+1}). \end{aligned} \tag{4.4.21}$$

La borne (4.4.10) sur la longueur du pas  $\alpha_k$  donne

$$(1 - \alpha_k)\mu_k \leq (1 - \tau_k + b' \|w_k - w_k^+\|)\mu_k. \tag{4.4.22}$$

En introduisant l'estimation (4.4.20) dans l'équation (4.4.22) et en utilisant l'hypothèse 4.4.9, le lemme 4.4.8 et la relation (4.4.5), nous obtenons

$$(1 - \alpha_k)\mu_k = o(\mu_k^+) + O(\mu_k^2) = o(\mu_k^+). \tag{4.4.23}$$

Le résultat du lemme est obtenu en introduisant (4.4.23) dans (4.4.21) et ensuite en utilisant la relation (4.4.6), le fait que  $\sigma_k^+ \leq \sigma_{k+1}$  et l'hypothèse 4.4.7.  $\square$

Nous donnons maintenant le résultat principal de cette section et sa preuve. Nous montrons en particulier que la suite  $\{w_k\}$  est asymptotiquement tangente au chemin central et qu'avec un bon choix de  $\{\zeta_k\}$ , la méthode proposée se réduit à la méthode de Newton régularisée appliquée aux conditions d'optimalité du problème barrière.

**Théorème 4.4.1.** *Supposons que  $\varepsilon_k = \Omega(\mu_{k+1})$ , alors pour tout  $k$  suffisamment grand, nous avons les résultats suivants.*

- (i) *L'algorithme 4.1 n'a plus besoin d'itérations internes, ce qui signifie que  $\sigma_{k+1} = \sigma_k^+$  et  $w_{k+1} = \widehat{w}_k$ .*
- (ii) *Les itérés sont asymptotiquement tangents au chemin central, c'est à dire*

$$w_k = w(\mu_k) + o(\mu_k). \quad (4.4.24)$$

- (iii) *Le pas unité est accepté par la règle de la fraction du déplacement à la frontière (4.2.3), ce qui signifie que  $\mu_{k+1} = \mu_k^+$  et  $\widehat{w}_k = w_k^+$ .*

*De plus, si la suite  $\{\zeta_k\}$  est choisie telle  $\zeta_k = \Omega(\mu_k)$ , alors l'instruction  $\lambda_{k+1} = y_k$  est exécutée à chaque itération.*

**Preuve.** La preuve du résultat (i) est obtenue en appliquant successivement le premier résultat du lemme 4.4.1, l'inégalité (4.4.12), l'inégalité  $\sigma_k^+ \leq \sigma_{k+1}$ , le lemme 4.4.9, la convergence des suites  $\{\lambda_k\}$  et  $\{\widehat{y}_k\}$  vers  $y^*$  et enfin l'hypothèse 4.4.7. Ceci donne

$$\begin{aligned} \|F(\widehat{w}_k, \lambda_{k+1}, \sigma_k^+, \mu_{k+1})\| &\leq \|F_0(\widehat{w}_k) - F_0(w(\mu_{k+1}))\| + \sigma_k^+ \|\lambda_{k+1} - \widehat{y}_k\| \\ &\leq L_2 \|\widehat{w}_k - w(\mu_{k+1})\| + \sigma_{k+1} \|\lambda_{k+1} - \widehat{y}_k\| \\ &= o(\mu_{k+1}) + o(\sigma_{k+1}) \\ &= o(\mu_{k+1}) \\ &\leq \varepsilon_k. \end{aligned}$$

Le résultat (ii) est une conséquence directe du résultat (i) et du lemme 4.4.9.

La preuve d'acceptation du pas unité par la règle de la fraction du déplacement à la frontière (4.2.3) se fait en suivant le même schéma de preuve du [13, Lemme 4.20] et en utilisant (4.4.6),  $\sigma_k^+ \leq \sigma_{k+1}$  et l'hypothèse 4.4.7. En utilisant ceci et les définitions de  $\mu_{k+1}$  et  $\widehat{w}_k$  à l'étape 6 de l'algorithme 4.1, nous obtenons  $\mu_{k+1} = \mu_k^+$  et  $\widehat{w}_k = w_k^+$ .

Passons maintenant à la preuve du dernier résultat du théorème. En utilisant les relations (4.4.24) et (4.4.1) et le fait que  $i_k \leq k - 1$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} g(x_k) &= g(x(\mu_k) + o(\mu_k)) \\ &= g(x^* + x'(0)\mu_k + o(\mu_k)) \\ &= g(x^*) + \nabla g(x^*)^\top x'(0)\mu_k + o(\mu_k) \\ &= o(\mu_k) \\ &= o(\mu_{i_k}). \end{aligned} \quad (4.4.25)$$

La quatrième équation découle du fait que  $g(x^*) = \nabla g(x^*)^\top x'(0) = 0$ . En effet, une différentiation de la fonction  $\mu \rightarrow F_0(w(\mu)) - \mu\tilde{e}$  en  $\mu = 0$  donne

$$\begin{pmatrix} \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(w^*) & \nabla g(x^*) & -I \\ \nabla g(x^*)^\top & 0 & 0 \\ Z^* & 0 & X^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \\ z'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e \end{pmatrix}.$$

La deuxième équation de ce système donne  $\nabla g(x^*)^\top x'(0) = 0$ . En rappelant que  $\eta_k = \|g(x_k)\| + \zeta_k$  et en utilisant (4.4.25), nous concluons que  $\zeta_k = \Omega(\mu_k)$  est une condition suffisante pour avoir  $\lambda_{k+1} = y_k$  à chaque itération, pour tout  $k \in \mathbb{N}$  suffisamment grand, ce qui termine la preuve du théorème.  $\square$

**Remarque 4.4.1.** Le résultat (ii) du théorème 4.4.1 montre que le taux de convergence de la suite  $\{w_k\}$  vers la solution est le même que celui de la suite  $\{\mu_k\}$  vers zéro. En effet, la relation (4.4.24) implique que

$$\frac{\|w_k - w^*\|}{\mu_k} \rightarrow \|w'(0)\|$$

où  $w'(0) \neq 0$ , d'après (4.4.2).

## 4.5 Implémentation

La première version du solveur numérique SPDOPT a été implémentée par Michel Bouard en 2011. Cette version est essentiellement basée sur la méthode de pénalisation quadratique et est ensuite appelée SPDOPT-QP. Depuis le début de ma thèse et après avoir bien compris le fonctionnement et la structure du code, j'ai commencé à apporter des améliorations à ce solveur. Une liste des améliorations les plus importantes est donnée ci-dessous.

- L'amélioration des règles de mise à jour des paramètres de la version SPDOPT-QP.
- L'implémentation d'une deuxième option algorithmique dans SPDOPT basée sur la méthode de lagrangien augmenté. La plupart des fonctions déjà implémentées dans SPDOPT-QP ont été modifiées et de nombreuses nouvelles fonctions ont été ajoutées. La version basée sur cette méthode, appelée SPDOPT-AL, améliorent d'une façon remarquable celle basée sur SPDOPT-QP, comme présenté dans le chapitre 3. SPDOPT-AL est maintenant la version par défaut utilisée par SPDOPT. L'utilisateur a toujours la possibilité de choisir d'utiliser SPDOPT-QP.
- L'implémentation d'une interface de SPDOPT à CUTEst.
- L'ajout d'une procédure pour le traitement des variables fixes. Ces dernières sont éliminées du problème dès le début du processus de la minimisation. L'importance de cette procédure s'est avérée surtout en résolvant des problèmes de la collection CUTEst. Le tiers de ces problèmes contient au moins une variable fixe. SPDOPT appliqué à ces problèmes sans la procédure déjà décrite termine le processus de résolution dès la première itération en déclarant un échec du au fait que la correction de l'inertie échoue.
- Dans le but de faciliter l'usage de SPDOPT, de nouvelles options ont été ajoutées. Celles ci permettent à l'utilisateur de contrôler les paramètres et les stratégies utilisées par l'algorithme sans avoir besoin de modifier le code directement. En particulier, SPDOPT offre la possibilité d'utiliser un fichier d'option. Un exemple de fichier d'option est donné dans la sous-section 4.6.4.

Toutes ces améliorations ont été ajoutées avec la perspective que le nouveau solveur d'optimisation non linéaire SPDOPT avec ces deux options algorithmiques, SPDOPT-QP et SPDOPT-AL, soit librement disponible à la communauté scientifique.

L'algorithme présenté dans ce chapitre est implémenté dans SPDOPT-AL. Nous décrivons ci-après les détails de cette implémentation.

**Traitement du problème d'entrée** Afin de simplifier la présentation de notre algorithme, nous avons considéré les problèmes d'optimisation avec contraintes s'écrivant sous

la forme  $(P_{EI})$ . Cependant, notre implémentation peut traiter, en utilisant une version légèrement modifiée de l'algorithme décrit dans la section 4.2, la formulation suivante

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x) \\ \text{s.c.} \quad & g_l \leq g(x) \leq g_u, \\ & x_l \leq x \leq x_u, \end{aligned} \tag{4.5.1}$$

où  $x_l \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty\})^n$ ,  $x_u \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$ , avec  $x_l \leq x_u$ , sont les bornes inférieure et supérieure de la variable  $x$  et  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  sont respectivement la fonction objectif et les contraintes qui doivent être au moins de classe  $C^2$ . Lorsque  $[x_l]_i = [x_u]_i$ , la variable  $[x]_i$  est fixée à la valeur  $[x_l]_i$  dans toutes les évaluations de fonctions et est éliminée du problème. Les contraintes,  $g(x)$ , ont des bornes inférieure  $g_l \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty\})^m$  et supérieure  $g_u \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^m$ . Si  $[g_l]_i = [g_u]_i$ , alors la  $i$ -ème contrainte est une contrainte d'égalité. Sinon, le problème (4.5.1) est automatiquement transformé en la forme équivalente suivante :

$$\begin{aligned} \min_{x, s} \quad & f(x) \\ \text{s.c.} \quad & g(x) - s = 0, \\ & x_l \leq x \leq x_u, \\ & g_l \leq s \leq g_u, \end{aligned} \tag{4.5.2}$$

où  $s$  est le vecteur des variables d'écart. Le lagrangien associé à ce problème est donné par

$$\mathcal{L}(x, s, y, z) = f(x) + y^\top (g(x) - s) - z_{xl}^\top (x - x_l) - z_{xu}^\top (x_u - x) - z_{sl}^\top (s - g_l) - z_{su}^\top (g_u - s),$$

où  $(y, z_{xl}, z_{xu}, z_{sl}, z_{su})^\top$  est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange. Dans la suite, nous utilisons les notations  $z := (z_{xl}, z_{xu}, z_{sl}, z_{su})^\top$ ,  $z_l = (z_{xl}, z_{sl})^\top$  et  $z_u := (z_{xu}, z_{su})^\top$ .

**Initialisation** Pour les variables primales, le point de départ,  $x_s$ , donné par l'utilisateur est utilisé dans la mesure de possible. Cependant, il est nécessaire dans quelques cas de le modifier de façon à ce qu'il soit suffisamment loin de la frontière. Pour cela, nous distinguons trois cas.

- Pour les variables bornées inférieurement, chaque composante du point de départ est modifiée par

$$[x_0]_i = \max \{ [x_s]_i, [x_l]_i + \epsilon \},$$

pour une constante  $\epsilon > 0$ .

- Pour les variables bornées supérieurement, chaque composante du point de départ est modifiée par

$$[x_0]_i = \min \{ [x_s]_i, [x_u]_i - \epsilon \}.$$

- Pour les variables bornées inférieurement et supérieurement, chaque composante du point de départ est modifiée par

$$[x_0]_i = \max \left\{ \min \left\{ \max \{ [x_s]_i, [x_l]_i + \epsilon \}, [x_u]_i - \epsilon \right\}, \frac{[x_l]_i + [x_u]_i}{2} \right\}.$$

La procédure décrite ci-dessus est aussi appliquée pour initialiser les variables d'écart. Elle est appliquée en remplaçant  $x_s$ ,  $x_l$  et  $x_u$  respectivement par  $g(x_s)$ ,  $g_l$  et  $g_u$ . Dans notre implémentation, nous avons choisi  $\epsilon = 0.1$ .

La valeur initiale de la variable duale  $z$  est déterminée par  $z_0 := (z_{l0}, z_{u0})^\top = (1, \dots, 1)^\top$ . En utilisant cette valeur et celle de  $x_0$ , la valeur initiale du multiplicateur de Lagrange associé aux contraintes d'égalité est obtenue en résolvant le problème de moindre carré suivant :

$$\min_{y \in \mathbb{R}^m} \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} \nabla g(x_0) \\ -I \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} \nabla f(x_0) \\ 0 \end{pmatrix} - z_{l0} + z_{u0} \right\|^2. \quad (4.5.3)$$

**Mise à jour du paramètre barrière** Le paramètre barrière est initialisé avec  $\mu_0 = 0.1$ . Pour la mise à jour du paramètre barrière test  $\mu_k^+$  à l'étape 1 de l'algorithme 4.1, nous proposons trois règles qui vérifient les hypothèses de la convergence globale et asymptotique. La première règle de mise à jour est la suivante :

$$\mu_k^+ = \min(0.2\mu_k, \mu_k^{1.5}).$$

Cette formule donne un taux de décroissance linéaire au cours des premières itérations et ensuite superlinéaire du paramètre barrière test. Cette règle sera notée "Statique".

La deuxième règle est inspirée de celle proposée par Gay, Overton et Wright [66]. Elle est donnée par :

Si  $\|F_0(w_k) - \mu_k \tilde{e}\| \leq 10^2 \mu_k$  alors  
 Si  $\mu_k \leq 10^{-4}$   
 $\mu_k^+ = \min(0.2\mu_k, \mu_k^{1.5})$   
 Sinon  
 $\mu_k^+ = \min\{F(w_k, \lambda_k, \sigma_k, \mu_k)/F(w_{k-1}, \lambda_{k-1}, \sigma_{k-1}, \mu_{k-1}), 0.1\} \mu_k$   
 Sinon  
 $\mu_k^+ = \min\{F(w_k, \lambda_k, \sigma_k, \mu_k)/F(w_{k-1}, \lambda_{k-1}, \sigma_{k-1}, \mu_{k-1}), 0.5\} \mu_k$   
 Fin.

Lorsque l'itéré courant est proche du chemin central (si  $\|F_0(w_k) - \mu_k \tilde{e}\| \leq 10^2 \mu_k$ ) et la solution optimale (si  $\mu_k < 10^{-4}$ ) alors, le paramètre barrière est réduit très rapidement. Dans les autres cas, le paramètre barrière test est aussi réduit mais moins rapidement. Cette règle sera appelée "GOW".

La troisième règle a été proposée par Armand, Benoist et Orban [13, Algorithme 2]. Elle consiste à choisir le paramètre barrière  $\mu_k^+$  avec la formule

$$\mu_k^+ = \min(0.01\mu_k, \mu_k^{1.99}).$$

En considérant cette mise à jour de  $\mu_k^+$ , le calcul de  $\hat{w}_k$  diffère légèrement de celui présenté dans l'algorithme 4.1. En effet, cet itéré est donné par

$$\hat{w}_k = w_k + a_k \circ d_w^{\mu_{k+1}}, \quad (4.5.4)$$

où  $a_k$  est calculé à l'étape 4 de l'algorithme 4.1 et  $d_w^{\mu_{k+1}}$  est la solution du système linéaire

$$J(w_k, \delta_k) d = -F(w_k, \sigma_k^+, \mu_{k+1}, \lambda_{k+1}). \quad (4.5.5)$$

Notons que le second membre de ce système linéaire contient  $\mu_{k+1}$  et non pas  $\mu_k^+$ . Cette règle de mise à jour sera appelée "ABO".



**Mise à jour du paramètre de pénalisation** Les valeurs des constantes utilisées à l'étape 1 de l'algorithme 4.1 sont  $a = 0.9$  et  $\ell = 2$ . La suite  $\{r_k\}$  est définie par  $r_k = 1/(k + 1)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Le paramètre de pénalisation est initialisé à  $\sigma_0 = \min\{0.1, \|F_0(w_0)\|\}$ . À chaque itération, le paramètre de pénalisation test  $\sigma_k^+$  est mis à jour avec la règle

$$\sigma_k^+ = \min\{\rho\sigma_k, r_k\},$$

pour  $\rho \in ]0, 1[$ . Dans notre implémentation, nous avons choisi  $\rho = 0.2$  à l'étape 2 et  $\rho = 0.1$  à l'étape 3.

**Solution du système linéaire** Soit  $w = (x, s, y, z)$  l'itéré actuel. Chaque étape de l'algorithme externe ou interne nécessite la résolution d'un système linéaire de la forme

$$\begin{pmatrix} H & 0 & \nabla g(x) & -I & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & 0 & 0 & -I & I \\ \nabla g(x)^\top & -I & -\delta_g I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Z_{xl} & 0 & 0 & X - X_l & 0 & 0 & 0 \\ -Z_{xu} & 0 & 0 & 0 & X_u - X & 0 & 0 \\ 0 & Z_{sl} & 0 & 0 & 0 & S - G_l & 0 \\ 0 & -Z_{su} & 0 & 0 & 0 & 0 & G_u - S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^x \\ d^s \\ d^y \\ d^{z_{xl}} \\ d^{z_{xu}} \\ d^{z_{sl}} \\ d^{z_{su}} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} r^x \\ r^s \\ r^y \\ r^{z_{xl}} \\ r^{z_{xu}} \\ r^{z_{sl}} \\ r^{z_{su}} \end{pmatrix}, \quad (4.5.6)$$

où  $\delta_g$  est un terme de régularisation et  $(r^x, r^s, r^y, r^{z_{xl}}, r^{z_{xu}}, r^{z_{sl}}, r^{z_{su}})^\top$  est un second membre qui dépendent du type de l'itération (voir (4.2.2) et (4.2.9)). Suivant l'usage commun dans la littérature des méthodes de points intérieurs, chaque lettre majuscule (sauf  $H$ ) utilisée dans le système linéaire donné ci-dessus dénote la matrice diagonale dont les éléments sont ceux du vecteur dénoté par la lettre minuscule : par exemple,  $G_l = \text{diag}(g_l)$ . Pour résoudre (4.5.6), nous divisons les équations en deux groupes. Nous commençons par résoudre le système linéaire symétrique

$$\begin{pmatrix} H + (X - X_l)^{-1}Z_{xl} + (X_u - X)^{-1}Z_{xu} & 0 & \nabla g(x) \\ 0 & (S - G_l)^{-1}Z_{sl} + (G_u - S)^{-1}Z_{su} & -I \\ \nabla g(x)^\top & -I & -\delta_g I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^x \\ d^s \\ d^y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} r^x + (X - X_l)^{-1}r^{z_{xl}} - (X_u - X)^{-1}r^{z_{xu}} \\ r^s + (S - G_l)^{-1}r^{z_{sl}} - (G_u - S)^{-1}r^{z_{su}} \\ r^y \end{pmatrix}.$$

La matrice de ce système linéaire sera notée  $J_S(w, \delta_g)$ . La direction  $d^z := (d^{z_{xl}}, d^{z_{xu}}, d^{z_{sl}}, d^{z_{su}})$  est ensuite récupérée en utilisant les quatre dernières équations du système (4.5.6). Par exemple, la direction  $d^{z_{xl}}$  est donnée par la formule suivante :

$$d^{z_{xl}} = -(X - X_l)^{-1}Z_{xl}d^x - (X - X_l)^{-1}r^{z_{xl}}.$$

Au cours des itérations externes, le terme de régularisation  $\delta_g$  est choisi tel que  $\delta_g = \max\{10^{-2}\mu_k, 10^{-8}\}$ . Ce choix vérifie les hypothèses de l'analyse globale et asymptotique présentée dans ce chapitre. Pour les itération internes, ce terme est donné par  $\delta_g = \sigma^i$ .

Au cours des itérations internes, la solution du système linéaire doit être une direction de descente pour la fonction de mérite  $\Theta_{\lambda,\sigma,\mu}$ . D'après la proposition 4.2.1, ceci est garanti à condition que la matrice  $K(w, \sigma)$  soit définie positive. Pour le problème (4.5.1), la matrice  $K(w, \sigma)$  est donnée par

$$\begin{pmatrix} H + (X - X_l)^{-1}Z_{xl} + (X_u - X)^{-1}Z_{xu} + \frac{1}{\sigma}\nabla g(x)\nabla g(x)^\top & -\frac{1}{\sigma}\nabla g(x) \\ -\frac{1}{\sigma}\nabla g(x)^\top & (S - G_l)^{-1}Z_{sl} + (G_u - S)^{-1}Z_{su} + \frac{1}{\sigma}I \end{pmatrix}.$$

La condition sur  $K(w, \sigma)$  est satisfaite lorsque l'inertie de la matrice  $J_S(w, \sigma)$  est exactement  $(n + m, m, 0)$ . En effet, nous avons  $J_S(w, \sigma) = PQP^\top$  où

$$P = \begin{pmatrix} I & 0 & -\frac{1}{\sigma}\nabla g(x) \\ 0 & I & \frac{1}{\sigma}I \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} K(w, \sigma) & 0 \\ 0 & -\sigma I \end{pmatrix}.$$

D'après la loi d'inertie de Sylvester, nous avons

$$\begin{aligned} \text{In}(J_S(w, \sigma)) &= \text{In}(Q) \\ &= \text{In}(K(w, \sigma)) + (0, m, 0). \end{aligned}$$

La matrice  $K(w, \sigma)$  est donc définie positive si et seulement si  $\text{In}(J_S(w, \sigma)) = (n + m, m, 0)$ . Dans notre implémentation, la matrice  $H$  est choisie de la forme  $H = \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(w) + \delta_l I$ , où  $\delta_l$  un terme de régularisation qui est choisi de façon à obtenir l'inertie correcte de  $J_S(w, \sigma)$ . Notons que le contrôle de l'inertie est encore effectué au cours des itérations externes.

**Choix de la longueur du pas** Qu'il s'agisse d'une itération externe ou interne, la résolution d'un système linéaire est suivie par le calcul d'un pas de déplacement le long de la direction de Newton en appliquant la règle de la fraction du déplacement à la frontière, pour maintenir la stricte réalisabilité par rapport à la contrainte de la positivité. Soit  $(d_k^x, d_k^s, d_k^y, d_k^z)$  la solution du système linéaire (4.5.6). L'itéré  $\hat{w}_k := (\hat{x}_k, \hat{s}_k, \hat{y}_k, \hat{z}_k)$ , calculé à l'étape 6 de l'algorithme des itérations externes est donné par

$$\hat{x}_k = x_k + \alpha_k^x d_k^x, \quad \hat{s}_k = s_k + \alpha_k^s d_k^s, \quad \hat{y}_k = y_k + \alpha_k^y d_k^y \quad \text{et} \quad \hat{z}_k = z_k + \alpha_k^z d_k^z,$$

où

$$\alpha_k^x = \min \left\{ 1, -\tau_k \min_{i: [d_k^x]_i < 0} \left\{ \frac{[x_k]_i}{[d_k^x]_i} \right\}, -\tau_k \min_{i: [d_k^s]_i < 0} \left\{ \frac{[s_k]_i}{[d_k^s]_i} \right\} \right\}, \quad (4.5.7)$$

$$\alpha_k^z = \min \left\{ 1, -\tau_k \min_{i: [d_k^z]_i < 0} \left\{ \frac{[z_k]_i}{[d_k^z]_i} \right\} \right\} \quad (4.5.8)$$

et  $\tau_k = \min\{0.99, 1 - \mu_k\}$ . En particulier, le choix de  $\tau_k$  vérifie les hypothèses 4.3.6 et 4.4.9 de l'analyse globale et asymptotique.

Pour la longueur du pas  $\alpha_k^y$ , il y a trois choix possibles qui sont  $\alpha_k^y = 1$  ou  $\alpha_k^x$  ou  $\alpha_k^z$ . Dans notre implémentation, nous avons utilisé  $\alpha_k^y = \alpha_k^x$ .

Au cours des itérations internes, la longueur du pas  $\alpha^i$  est calculée en deux étapes. En premier lieu, nous calculons

$$\alpha^{\min} = \min \{\alpha^x, \alpha^z\},$$

où  $\alpha^x$  et  $\alpha^z$  sont calculées de la même manière que dans (4.5.7) et (4.5.8). Ensuite, si nécessaire, une technique de recherche linéaire est appliquée pour trouver

$$\alpha^i \in ]0, \alpha^{\min}],$$

fournissant une décroissance suffisante de la fonction de mérite.

**Tests d'arrêt** Si la norme des conditions d'optimalité en l'itéré actuel  $w$  satisfait

$$\|F_0(w)\| \leq \varepsilon,$$

où  $\varepsilon = 10^{-8}$ , alors l'algorithme s'arrête en déclarant convergence vers une solution optimale. Cette condition d'arrêt est testée au début de chaque itération externe et interne.

Concernant le test d'arrêt des itérations internes, nous avons considéré le choix suivant de  $\varepsilon_k$  :

$$\varepsilon_k = 0.9 \max \{ \|F(w_i, \lambda_i, \sigma_i, \mu_i)\| : (k-4)^+ \leq i \leq k \} + 10 \min \{ \alpha_k^x, \alpha_k^z \}^{0.2} \mu_{k+1}. \quad (4.5.9)$$

En appliquant le lemme 3.3.1, il est facile de démontrer que ce choix garantit que  $\{\varepsilon_k\}$  converge vers zéro. Notons qu'on utilise aussi le fait que  $\{\alpha_k\}$  converge vers zéro lorsque  $\{\mu_k\}$  ne converge vers zéro (comme indiqué dans la preuve par contradiction du résultat (iii) du théorème 4.3.2). De plus, il est clair que le choix (4.5.9) vérifie  $\varepsilon_k = \Omega(\mu_{k+1})$ , une hypothèse nécessaire dans le théorème 4.4.1.

**Difficultés numériques dues au rapprochement des itérés à la frontière** Au cours du processus de la résolution du problème, il est possible qu'une (ou plusieurs) composante de la variable  $x$  se rapproche de la frontière, c'est à dire  $[x]_i - [x_l]_i \leq \epsilon_{\text{mach}} \mu$ , où  $\epsilon_{\text{mach}}$  est la précision de la machine. Ceci peut conduire à des difficultés numériques. Afin de les éviter, la borne inférieure de  $[x_l]_i$  est légèrement modifiée par  $(\epsilon_{\text{mach}})^{\frac{3}{4}} \max\{1, [x_l]_i\}$ . Une procédure analogue est appliquée lorsque la variable  $x$  se rapproche de  $x_u$ . Cette procédure a été utilisée dans IPOPT [121].

## 4.6 Résultats numériques

Nous divisons les résultats numériques en 6 sous-sections. Dans les sous-sections 4.6.1 et 4.6.2, nous nous intéressons aux choix du paramètre barrière et du point de départ des itérations internes et l'influence de ces choix sur les performances de SPDOPT-AL. Dans la sous-section 4.6.3, nous étudions le comportement de SPDOPT-AL sur l'exemple de Wächter et Biegler [119]. Nous présentons ensuite dans les sous-sections 4.6.4 et 4.6.5 deux comparaisons de SPDOPT-AL avec IPOPT, ALGENCAN et LANCELOT. La première comparaison concerne des problèmes de petite taille provenant de la librairie Hock et Schittkowski et la deuxième s'intéresse aux problèmes de taille plus grande issus de

la collection CUTEst. Nous terminons cette étude numérique par une présentation des performances de SPDOPT-AL sur les problèmes dégénérés.

Les expériences numériques de la sous-section 4.6.5 sont réalisées sur un serveur HP DL360G5, bi-Xeon quad core à 2,33 GHz et 16Go de RAM. Le reste des expériences a été mené sur un MacBook Pro avec un processeur Intel Core i7 à 2.5 GHz et 8 Go de mémoire. Les détails sur la taille des problèmes utilisés dans cette étude numérique et les résultats de l'exécution de SPDOPT-AL, IPOPT, ALGENCAN et LANCELOT sont donnés dans les annexes B, C, D et E.

#### 4.6.1 Stratégies de réduction de $\mu$

Au cours de nos tests numériques, nous avons remarqué que la règle de mise à jour du paramètre barrière a une grande influence sur les performances de SPDOPT-AL. Pour mettre en évidence cette influence, nous comparons les performances de SPDOPT-AL avec les trois règles de mise à jour décrites dans la section précédente en considérant 174 problèmes des bibliothèques Hock et Schittkowski [83] et Schittkowski [111] s'écrivant sous la forme  $(P_{EI})$ . Tous ces problèmes sont formulés en utilisant le langage de modélisation AMPL. Nous avons éliminé deux problèmes de cette collection :

- 1 problème qui n'est pas différentiable : **hs087**.
- 1 problème qui n'est pas borné inférieurement : **s340**.

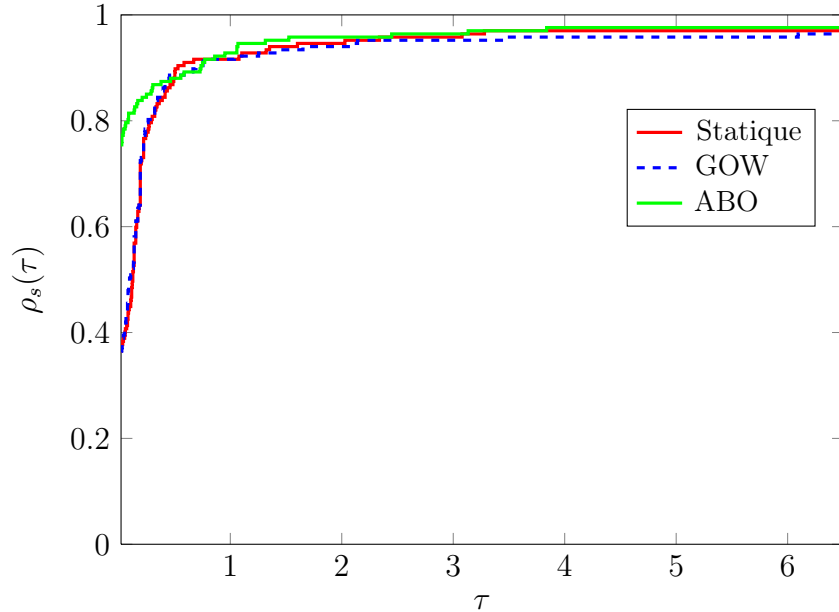


FIGURE 4.1 – Comparaison du nombre d'évaluations de fonctions de SPDOPT-AL avec 3 mises à jour du paramètre barrière.

Le résultat de la comparaison des trois mises à jour de  $\mu$  en terme de nombre d'évaluations de fonctions est donné dans la figure 4.1. La première conclusion de ce profil de performance est que SPDOPT-AL a le même taux de robustesse avec les trois règles. Ce taux est de l'ordre de 97%. En terme d'efficacité, il est clair que la version ABO est la plus efficace. Le taux d'efficacité de cette version dépasse 75% tandis que celui des

deux autres versions est de l'ordre de 38%. Nous avons aussi effectué des tests en faisant décroître le paramètre barrière test  $\mu_k^+$  plus vite avec les règles Statique et GOW. Ceci a permis, comme prévu, d'améliorer l'efficacité de ces deux versions. Le taux d'efficacité de SPDOPT-AL avec les mises à jour Statique et GOW se rapprochent de celui avec la règle ABO présentée dans la figure 4.1. Cependant, ce gain en terme d'efficacité a été accompagné avec une perte en terme de robustesse. Ceci montre que le calcul de  $\hat{w}_k$  donné par (4.5.4) en utilisant la solution du système linéaire (4.5.5) (avec  $\mu_{k+1}$  dans le second membre au lieu de  $\mu_k^+$ ) a un impact positif sur la robustesse de SPDOPT-AL. Dans le reste du chapitre, nous utilisons la mise à jour ABO.

#### 4.6.2 Points de départ des itérations internes

La deuxième comparaison concerne le point de départ des itérations internes. Nous considérons deux choix :  $w_k^0 = w_k$  et  $w_k^0 = \hat{w}_k$ . Le résultat de la comparaison est donné dans la figure 4.2. D'après ce profil de performance, il est clair que le choix  $w_k^0 = \hat{w}_k$

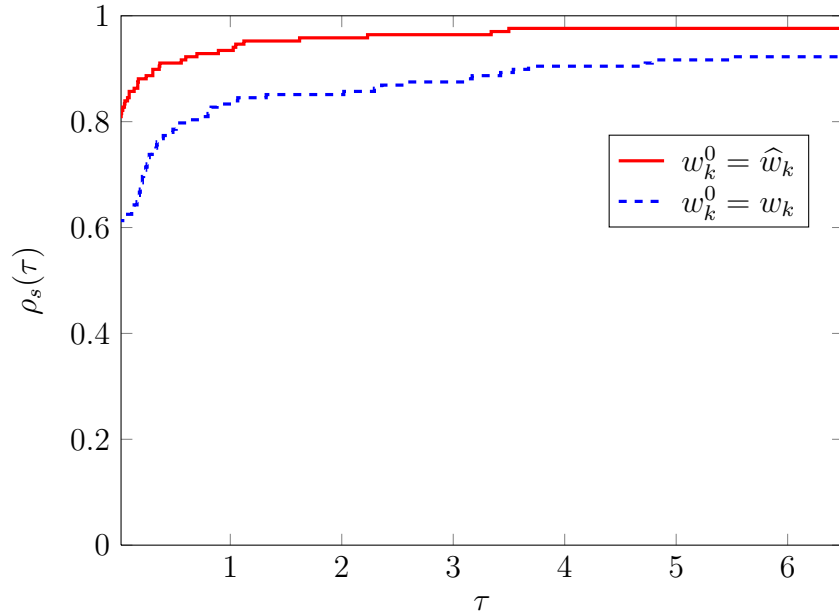


FIGURE 4.2 – Comparaison du nombre d'évaluations de fonctions de SPDOPT-AL avec deux choix du point de départ des itérations internes.

améliore de façon significative les résultats de SPDOT-AL en terme d'efficacité et robustesse. En particulier, le gain d'efficacité est de l'ordre de 20%. Cependant, nous avons remarqué que dans certains cas, le choix  $w_k^0 = \hat{w}_k$  peut aboutir à accroître la longueur des itérations internes ce qui influe sur l'efficacité de l'algorithme. Les statistiques pour quatre exemples, présentées dans le tableau 4.1, illustrent bien cette remarque.

Problème	$w_k^0 = \widehat{w}_k$			$w_k^0 = w_k$		
	# itér. externes	# itér. internes	# éval. de fonctions	# itér. externes	# itér. internes	# éval. de fonctions
hs019	16	<b>37</b>	55	14	<b>12</b>	27
s263	63	<b>331</b>	395	25	<b>6</b>	39
s372	16	<b>100</b>	214	14	<b>20</b>	39
s389	30	<b>95</b>	216	28	<b>14</b>	46

TABLE 4.1 – Exemples de problèmes pour lesquels les performances du choix  $w_k^0 = w_k$  sont meilleures que celles du choix  $w_k^0 = \widehat{w}_k$ .

La version actuelle de SPDOPT-AL considère automatiquement le point  $\widehat{w}_k$  comme point de départ pour les itérations internes, ce qui est justifié par le profil de performance donné par la figure 4.2. Cependant, il serait intéressant d'ajouter une procédure qui permet de choisir un point de départ suivant certains critères.

### 4.6.3 Exemple de Wächter et Biegler

En 2006, Wächter et Biegler [121] ont proposé et analysé un exemple, bien posé dans le sens où la complémentarité stricte et la condition suffisante de second ordre sont vérifiées à la solution, pour lequel toute méthode qui génèrent des directions en linéarisant les contraintes et qui forcent les contraintes d'inégalité en utilisant une règle de fraction du déplacement à la frontière converge vers de fausses solutions. Ce problème est donné par

$$\begin{aligned}
\min \quad & f(x) \\
\text{s.c.} \quad & x_1^2 - x_2 = a, \\
& x_1 - x_3 = b, \\
& x_2 \geq 0, x_3 \geq 0,
\end{aligned} \tag{4.6.1}$$

où  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \geq 0$ . Notons que la forme de la fonction objectif  $f(x)$  n'est pas importante puisque les propriétés intéressantes de ce problèmes sont générées par les contraintes. Dans la suite, nous considérons  $f(x) = x_1$ . SPDOPT-AL appliqué au problème (4.6.1) avec  $(a, b) = (1, 2)$  et le point de départ  $x_0 = (-2, 1, 1)$  termine avec la solution  $x^* = (2, 3, 0)$  après 14 itérations, dont 6 sont externes et 8 sont internes. Le comportement de SPDOPT-AL est décrit dans la figure 4.3<sup>12</sup>. Notons que ALGENCAN et LANCELOT-A sont aussi capables de résoudre ce problème.

12. Dans la figure 4.3, nous avons considéré la projection du problème sur le plan  $(x_1, x_2)$ .

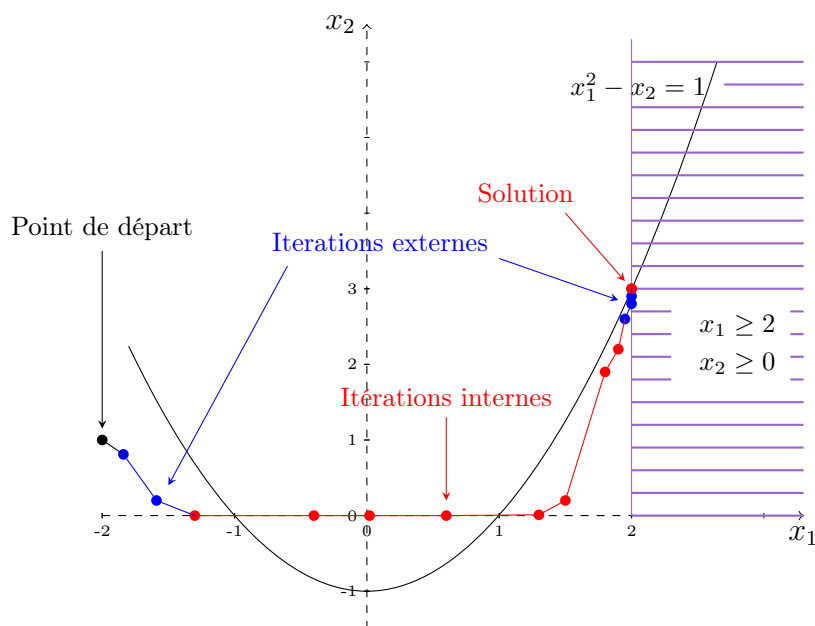


FIGURE 4.3 – Comportement de SPDOPT-AL sur l'exemple de Wächter et Biegler avec  $(a, b) = (1, 2)$ .

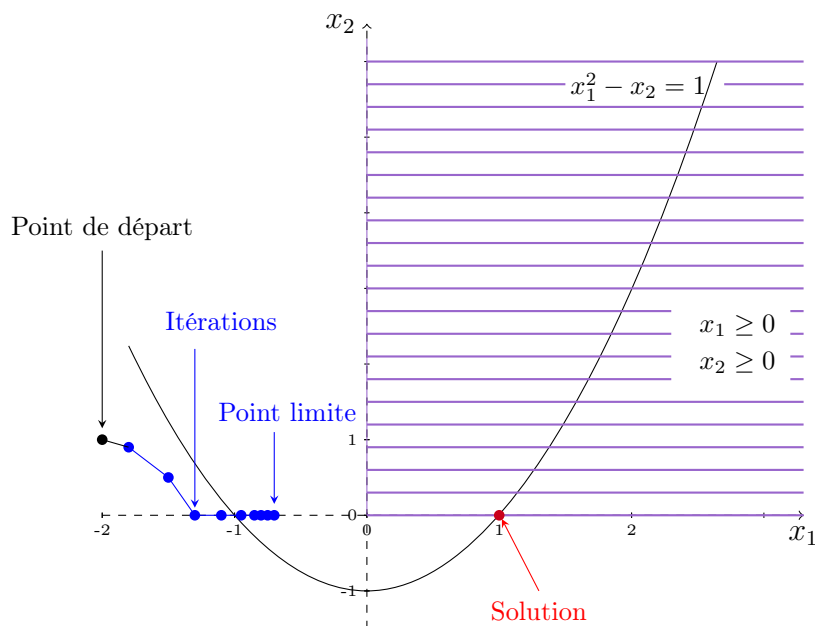


FIGURE 4.4 – Comportement de SPDOPT-AL (sans mise à l'échelle) sur l'exemple de Wächter et Biegler avec  $(a, b) = (1, 0)$ .

En modifiant légèrement le problème en considérant la paire  $(a, b) = (1, 0)$ , le domaine réalisable par rapport aux contraintes de borne devient plus grand (la partie hachurée de la figure 4.4) et la solution est maintenant donnée par  $x^* = (1, 0, 1)$ . Pour ce problème, SPDOPT-AL ne converge pas vers la solution  $x^*$  et termine par converger vers le point  $\bar{x} = (-0.707107, 0, 0)$ . Au cours du processus de la minimisation, nous avons observé que

l'étape 3 est toujours exécutée à partir de la 8-ème itération et l'algorithme génère la suite  $\{\sigma_k z_k\}$  vérifiant le résultat (4.3.19) donné par le théorème de la convergence globale. Cette deuxième observation est confirmée par la preuve du résultat (4.3.19) (plus précisément *Cas 2*). Notons enfin que si on applique SPDOPT-AL en autorisant la procédure de mise à l'échelle, le problème est résolu après 6 itérations externes et 11 itérations internes contrairement à IPOPT, ALGENCAN et LANCELOT-A qui ne résolvent pas ce problème sans ou avec une procédure de mise à l'échelle.

#### 4.6.4 Collection de Hock et Schittkowski

Nous présentons dans cette sous-section les performances de SPDOPT-AL comparées avec une méthode de points intérieurs implémentée dans IPOPT et avec deux solveurs basés sur la méthode de lagrangien augmenté, ALGENCAN et LANCELOT-A sur les 172 problèmes de la collection de Hock et Schittkowski utilisés dans les sous-sections 4.6.1 et 4.6.2. Le nombre de variables de ces problèmes varie de 2 à 55 et le nombre des contraintes varie de 1 à 36.

Dans le but d'avoir un test d'arrêt similaire pour tous les codes, nous avons choisi de réaliser tous nos tests numériques sans aucune procédure de mise à l'échelle. Les quatre codes ont été exécutés avec une tolérance d'arrêt  $\varepsilon = 10^{-8}$ . Une limite d'une heure de temps CPU et de 3000 d'itérations a été imposée pour chaque problème. Le solveur linéaire MA57 a été utilisé par SPDOPT-AL, IPOPT et ALGENCAN. Cependant, LANCELOT-A utilise une méthode de gradient conjugué préconditionné<sup>13</sup>. Les options des quatre codes sont donnés ci-dessous.

# SPDOPT-AL	# ALGENCAN
scale no	LINEAR-SYSTEMS-SCALING-AVOIDED
linearsolver ma57	OBJECTIVE-AND-CONSTRAINTS-SCALING-AVOIDED
init ls	ACC-FEASIBILITY-THRESHOLD 1.0d+20
mustrategy probing	ACC-OPTIMALITY-THRESHOLD 1.0d+20
# IPOPT	# LANCELOT-A
nlp_scaling_method none	maxit 3000
linear_solver ma57	ctol 1e-8
constr_viol_tol 1e-8	gtol 1e-8
dual_inf_tol 1e-8	
compl_inf_tol 1e-8	

FIGURE 4.5 – Options de SPDOPT-AL, IPOPT, ALGENCAN et LANCELOT-A.

La figure 4.6 présente le profil de performance associé au nombre d'évaluations de fonctions sur une collection de 158 problèmes : 14 problèmes ont été éliminés car les valeurs finales de la fonction objectif sont différentes. Ce profil montre que SPDOPT-AL est plus efficace que IPOPT et moins robuste. Cette figure montre aussi que SPDOPT-AL

13. Dans la sous-section suivante, LANCELOT-B sera appliqué avec la méthode de More-Toraldo. Notons encore que la version considérée de LANCELOT-B est incluse dans la librairie GALAHAD [79], version 2.5.0002 compilée en utilisant toutes les fonctions de HSL demandées pour améliorer ces performances.



est plus efficace et robuste que ALGENCAN et LANCELOT-A. En particulier, le gain en terme d'efficacité dépasse 40%.

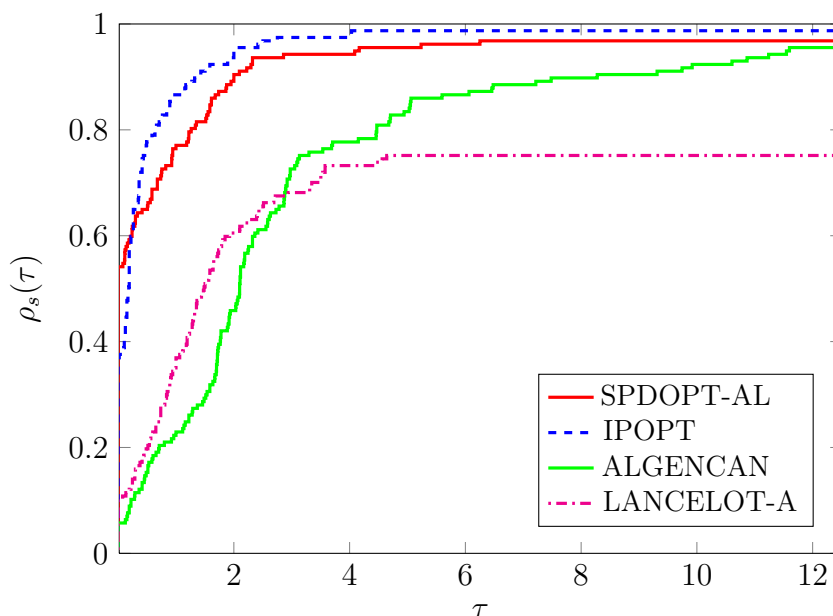


FIGURE 4.6 – Nombre d'évaluations de fonctions de SPDOPT-AL, IPOPT, ALGENCAN et LANCELOT-A sur 158 problèmes de Hock et Schittkowski.

En comparant le nombre d'évaluations de gradients des quatre solveurs, nous avons obtenu un profil similaire à celui donné dans la figure 4.6. Concernant le temps CPU, tous les problèmes sont résolus très rapidement. C'est pourquoi, nous n'avons pas inclus une comparaison des quatre solveurs en terme de cette mesure.

#### 4.6.5 Collection de CUTEst

Nous considérons maintenant des problèmes d'optimisation de taille plus grande. Nous considérons tous les problèmes de la collection CUTEst qui s'écrivent sous la forme (4.5.1) pour lesquels le nombre de contraintes d'égalité est inférieur à celui de variables. Cet ensemble contient initialement 613 problèmes. Pour les problèmes ayant des dimensions variables, nous avons utilisé les dimensions par défaut sauf pour 13 problèmes : CVXQP1-3, GAUSSELM, NCVXQP1-9. Parmi les 613 problèmes, nous avons exclu 12 problèmes pour les raisons suivantes :

- 1 problème pour lequel la violation des contraintes évaluée en le point de départ est très grande : VANDERM4.
- 2 problèmes pour lesquels la matrice jacobienne ne peut pas être évaluée en le point de départ : S365 et S365MOD.
- 2 problèmes qui produisent une erreur NaN (Not a Number) : KTMODEL et QCNEW.
- 3 problèmes dont la solution est non bornée inférieurement : LUKVLI2, MESH et STATIC3.
- 4 problèmes qui sont non réalisables : CONT6-QQ, LUBRIFC, LUBRIF et MODEL.

Nous avons aussi éliminé les 92 problèmes provenant de la collection de Hock et Schittkowski qui sont utilisés dans la sous-section précédente. L'ensemble restant contient 509

problèmes. La figure 4.7 illustre la distribution de ces problèmes selon le nombre de variables.

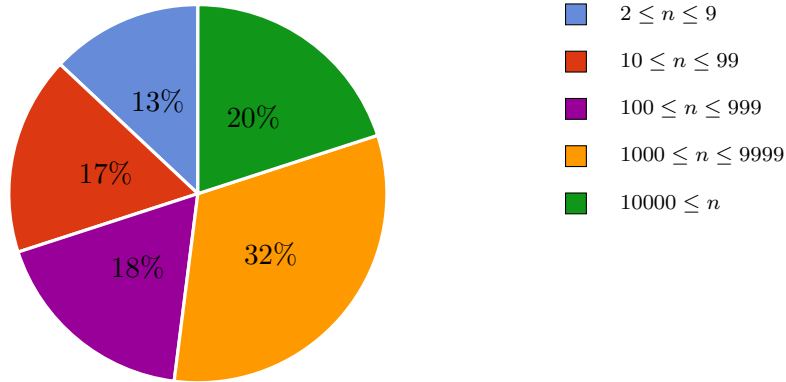


FIGURE 4.7 – Distribution des 509 problèmes selon le nombre de variables.

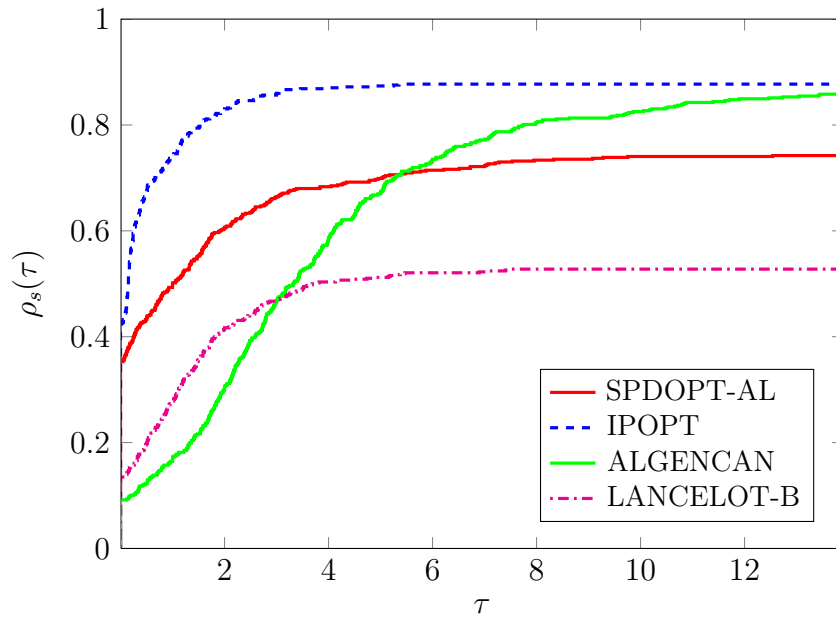


FIGURE 4.8 – Nombre d'évaluations de fonctions de SPDOPT-AL, IPOPT, ALGENCAN et LANCELOT-B sur 468 problèmes de CUTEst.

Le profil de performance présenté dans la figure 4.8 compare le nombre d'évaluations de fonctions des quatre codes sur un ensemble de 468 problèmes de la collection considérée. Pour le reste des problèmes, au moins deux méthodes trouvent de différentes solutions qui vérifient (3.6.1). En terme d'efficacité, SPDOPT-AL semble être plus efficace que les deux méthodes de lagrangien augmenté et moins efficace que IPOPT. L'efficacité de ce dernier dépasse 42% alors que celle de SPDOPT-AL est de l'ordre de 36%. En terme de robustesse, IPOPT et ALGENCAN démontre des taux de robustesse similaires. IPOPT et ALGENCAN résolvent respectivement 88% et 85% des problèmes. SPDOPT-AL est incapable de résoudre environ un quart de la collection considérée : plus de 70%

de ces échecs sont dus à un dépassement du nombre maximum d'itérations. Une étude approfondie a montré que l'origine de ces échecs est due au fait que les itérés primaux générés par l'algorithme se rapprochent très vite de la frontière. Dans ce cas, la direction primale obtenue en résolvant le système linéaire (4.5.6) devient très petite ce qui rend le progrès vers la solution très lent et dans la plupart des cas, l'algorithme termine avec un échec du à un dépassement des 3000 itérations. Notons que cette situation peut aussi se produire lorsque les variables primales sont proches à la solution alors que les variables duales n'ont pas encore convergé. C'est pourquoi, nous autorisons notre algorithme dans cette situation à calculer une nouvelle estimation de la variable  $y$  au sens des moindres carrés en résolvant un problème de la même forme que (4.5.3). Le succès de cette procédure est limité. L'implémentation d'une procédure efficace pour corriger ces échecs améliorera certainement la robustesse de SPDPOT-AL. Elle sera l'objet de prochaines recherches.

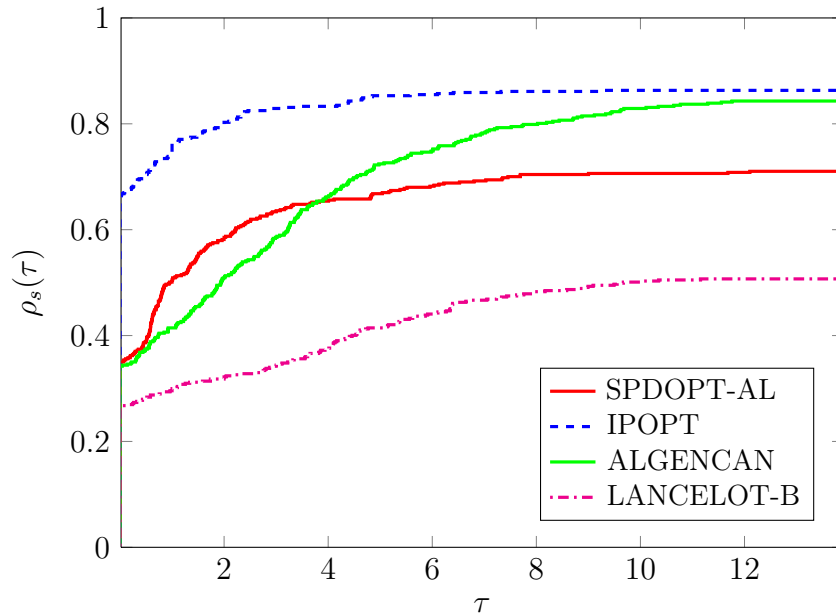


FIGURE 4.9 – Temps CPU de SPDOPT-AL, IPOPT, ALGENCAN et LANCELOT-B sur 438 problèmes de CUTEst.

La figure 4.9 montre une comparaison des quatre solveurs en terme de temps CPU. Pour obtenir ce profil, nous avons inclus seulement 438 problèmes, pour lesquels le solveur le plus rapide à trouver une solution optimale a besoin d'au moins 0.05 secondes. De nouveau, nous observons que IPOPT est le plus efficace. SPDOPT-AL et ALGENCAN présentent les mêmes taux d'efficacité.

#### 4.6.6 Collection de problèmes dégénérés

Qu'il s'agisse d'un problème d'optimisation de la forme  $(P_E)$  ou  $(P_{EI})$ , le solveur SPDOPT introduit une régularisation naturelle du problème. Dans les chapitres 2 et 3, nous avons montré par le biais des tests numériques que cette régularisation est très adaptée aux problèmes d'égalité dégénérés. Dans cette section, nous étudions le comportement de SPDOPT-AL sur deux collections de problèmes dégénérés s'écrivant sous la forme  $(P_{EI})$ .

## 4.6.6.1 Problèmes dégénérés de COPS et CUTer

La première collection des problèmes dégénérés a été obtenue en reformulant les problèmes avec contraintes d'égalité de la forme

$$\begin{array}{ll} \min_{x \in \mathbb{R}^n} & f(x) \\ \text{s.c.} & g(x) = 0, \end{array}$$

en divisant les égalités en deux inégalités comme suit :

$$\begin{array}{ll} \min_{x \in \mathbb{R}^n} & f(x) \\ \text{s.c.} & g(x) \leq 0, \\ & g(x) \geq 0. \end{array}$$

Avec cette transformation, il est clair que le problème obtenu est dégénéré puisque la matrice jacobienne des contraintes n'est pas de plein rang. Notons que cette technique a été utilisée par Wright [127]. Nous avons appliqué cette transformation aux 108 problèmes d'égalité provenant des bibliothèques COPS et CUTer utilisés aux chapitres 2 et 3.

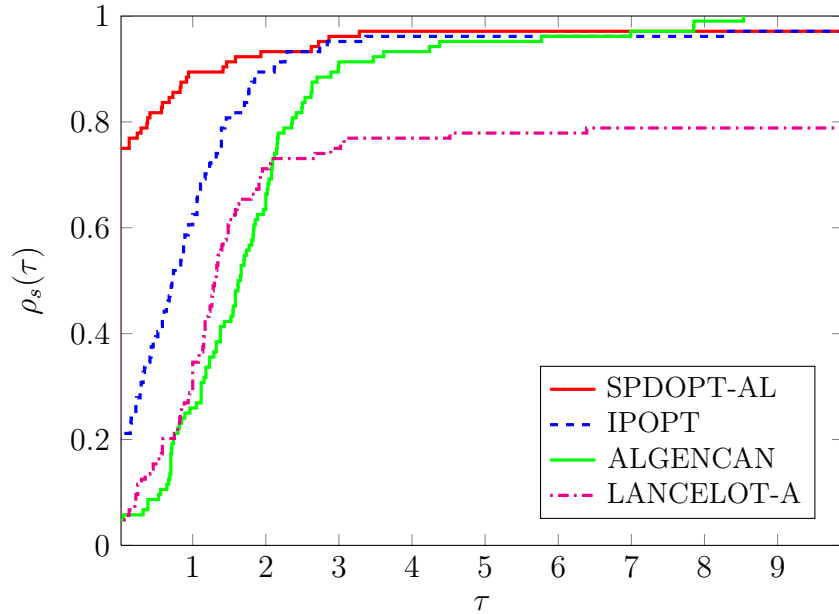


FIGURE 4.10 – Nombre d'évaluations de fonctions de SPDOPT-AL, IPOPT, ALGENCAN et LANCELOT-A sur 104 problèmes dégénérés.

Les performances des quatre solveurs en terme de nombre d'évaluations de fonctions sur cette collection de problèmes sont données dans la figure 4.10. Ce profil diffère de celui présenté dans la figure 4.8. Nous observons que SPDOPT-AL est le plus efficace sur ce type de problèmes. En effet, le taux d'efficacité de SPDOPT-AL est 3 fois plus grand que celui de IPOPT et 7 fois plus grand que celui de ALGENCAN et LANCELOT-A. En terme de robustesse, ALGENCAN est le plus robuste. Il est capable de résoudre tous les problèmes tandis que SPDOPT-AL et IPOPT résolvent 97% des problèmes. La figure 4.11 confirme les bonnes performances de SPDOPT-AL en terme de temps CPU.

Comme ceux présentés dans les deux chapitres précédents, ces profils montrent que la régularisation naturelle introduite par SPDOPT-AL est très adaptée à la résolution des problèmes dégénérés.

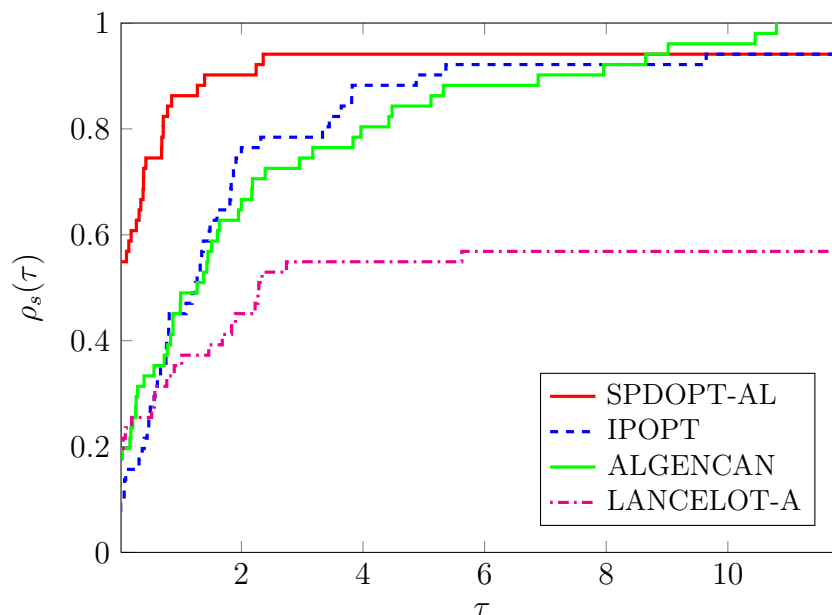


FIGURE 4.11 – Temps CPU de SPDOPT-AL, IPOPT, ALGENCAN et LANCELOT-A sur 44 problèmes dégénérés.

#### 4.6.6.2 Collection de MacMPEC

Un programme mathématique avec contraintes d'équilibre (MPEC) est un problème d'optimisation dont les contraintes incluent des contraintes d'équilibre telles les inégalités variationnelles ou les conditions de complémentarité. Lorsqu'il est reformulé comme un problème d'optimisation non linéaire, un MPEC ne satisfait ni la condition de qualification LICQ ni MFCQ dans tous les points réalisables, ce qui rend la résolution de ce type de problèmes très difficile.

Pour tester les performances de SPDOPT-AL sur ce type de problème, nous avons considéré 85 problèmes de la collection MacMPEC [89] de Sven Leyffer. Ces problèmes sont formulés en AMPL. Les performances des quatre solveurs sur un ensemble de problèmes de cette collection sont présentées dans les figures 4.12 et 4.13. Avec ces profils, SPDOPT-AL et LANCELOT-A sont les plus efficaces alors que IPOPT est le plus robuste.

## 4.7 Conclusion

Nous avons proposé dans ce chapitre une nouvelle méthode primale-duale pour la résolution des problèmes d'optimisation non linéaire avec contraintes d'égalité et d'inégalité. Cette méthode combine des techniques de lagrangien augmenté et de points intérieurs. La convergence globale et asymptotique a été démontrée. Une description détaillée de

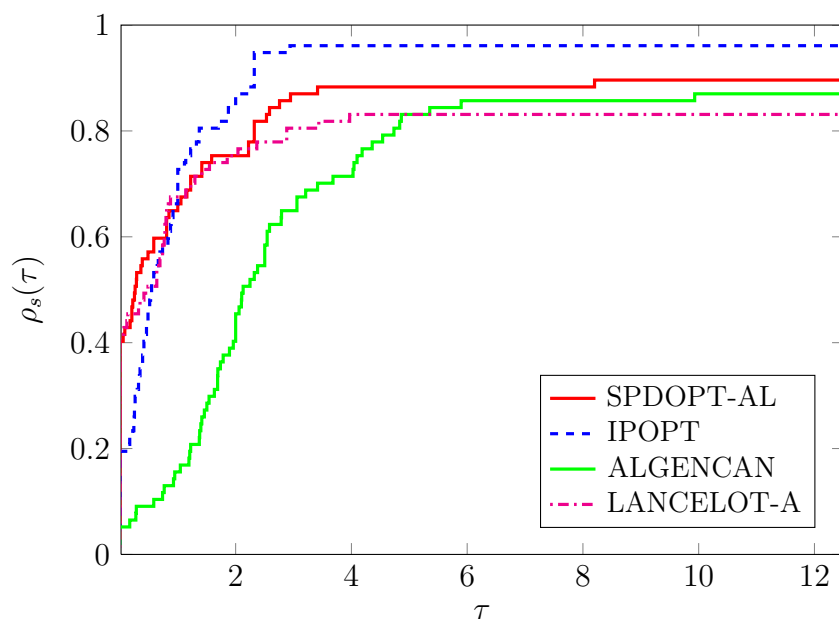


FIGURE 4.12 – Nombre d'évaluations de fonctions de SPDOPT-AL, IPOPT, ALGENCAN et LANCELOT-A sur 77 problèmes de la collection MacMPEC.

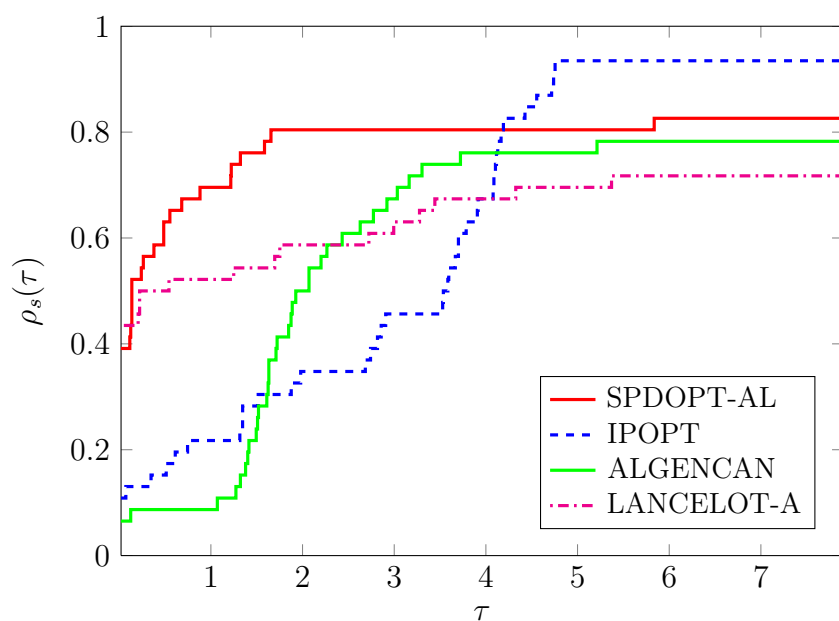


FIGURE 4.13 – Temps CPU de SPDOPT-AL, IPOPT, ALGENCAN et LANCELOT-A sur 46 problèmes de la collection MacMPEC.

l'implémentation de cet algorithme a été présentée. Les performances de cet algorithme ont été évaluées par le biais d'une étude numérique extensive basée sur quatre collections de problèmes dont la dimension totale est 976 problèmes. Les résultats numériques ont montrés que la méthode proposée jouit généralement d'une bonne performance surtout en terme d'efficacité en résolvant les problèmes standards et dégénérés. La robustesse de cette méthode peut être accrue en améliorant la procédure avec laquelle les contraintes

d'inégalité sont traitées afin d'éviter que les directions de recherche deviennent très petites. L'amélioration de la robustesse de notre algorithme peut se faire encore en explorant de nouvelles techniques de globalisation notamment le filtre.

# Chapitre 5

## Conclusions et perspectives

Dans cette thèse, nous avons proposé SPDOPT, un nouveau solveur basé sur les méthodes fortement primales-duales pour la résolution des problèmes d'optimisation non linéaire avec contraintes. SPDOPT est écrit en C, possède une interface à AMPL [63] et CUTEst [81] et utilise soit MA57 [53], soit MUMPS [3] pour la résolution du système linéaire. Notons que les meilleures performances sont obtenues avec le solveur linéaire MA57. La première caractéristique de ce solveur par rapport à ceux déjà existants est que le contrôle des itérés s'effectue dans l'espace primal-dual tout au long du processus de la minimisation, d'où l'appellation méthodes fortement primales-duales. En particulier, la globalisation des algorithmes implémentés dans SPDOPT est effectuée par une méthode de recherche linéaire qui utilise une fonction de mérite primale-duale. La deuxième caractéristique est que SPDOPT introduit une régularisation naturelle du système linéaire utilisé à chaque itération pour calculer une direction de recherche ce qui permet à notre code de bien se comporter pour résoudre les problèmes dégénérés.

Pour la résolution des problèmes d'optimisation avec contraintes d'égalité, SPDOPT offre la possibilité d'utiliser deux algorithmes primaux-duaux. Le premier algorithme, étudié dans le chapitre 2, consiste à appliquer une méthode de type Newton à une suite de systèmes d'optimalité perturbés qui découle naturellement de l'approche de pénalisation quadratique. Une caractéristique importante de l'algorithme est que le paramètre de pénalisation est autorisé à augmenter au cours des itérations internes ce qui permet d'éviter le mauvais conditionnement associé aux méthodes de pénalisation quadratique. La convergence globale des itérés vers la solution a été établie. Un résultat de convergence superlinéaire asymptotique a été démontré. Nous avons réalisé des expériences numériques sur un ensemble de 109 problèmes provenant des bibliothèques COPS et CUTER. Les résultats obtenus montrent que SPDOPT est aussi efficace que IPOPT pour la résolution des problèmes d'optimisation réguliers et beaucoup plus robuste pour la résolution des problèmes dégénérés. Suite à quelques observations liées au comportement du terme de perturbation des contraintes d'égalité et dans le but d'améliorer le taux de convergence de la méthode, nous avons proposé dans le chapitre 3 un nouvel algorithme de lagrangien augmenté dans le contexte primal-dual. Un aspect important de cette approche est qu'avec un bon choix des règles de mise à jour des paramètres, l'algorithme se réduit asymptotiquement à une méthode de Newton régularisée appliquée aux conditions d'optimalité du problème initial. Par conséquent, un taux de convergence quadratique a été démontré. Afin d'évaluer les performances de cet algorithme, nous l'avons comparé à la méthode développée dans



le chapitre 2. Les résultats obtenus confirment les résultats théoriques établis et montrent que la méthode proposée a de meilleures performances. Nous avons aussi comparé cette méthode à deux solveurs bien établis basés sur la méthode de lagrangien augmenté, ALGENCAN et LANCELOT-A. Cette comparaison montre que l'algorithme proposé est très efficace et robuste.

Dans le chapitre 4, nous avons considéré une extension de la méthode du chapitre 3 pour résoudre les problèmes avec contraintes d'égalité et d'inégalité. La méthode proposée est basée sur une méthode Newtonienne appliquée à une suite de systèmes de conditions d'optimalité perturbées. Ces systèmes découlent d'une reformulation du problème initial sous la forme d'une suite de problèmes de pénalisation, en introduisant un lagrangien augmenté pour traiter les contraintes d'égalité et une fonction barrière logarithmique classique pour les inégalités. Notons que notre algorithme introduit une perturbation des contraintes d'égalité ainsi que les conditions de complémentarité. La convergence globale et asymptotique de la méthode proposée a été démontrée sous des hypothèses standards. En particulier, nous avons montré que le taux de convergence de la suite des itérés primaux-duaux vers la solution est superlinéaire et que les itérés sont asymptotiquement tangents au chemin central. Nous avons effectué une étude numérique détaillée de l'algorithme proposé. Dans cette étude, nous avons présenté en premier temps l'impact du choix du paramètre barrière et du point de départ des itérations internes sur les performances de SPDOPT. Ceci nous a permis de fixer les choix par défaut adoptés par SPDOPT pour ces paramètres. Nous avons ensuite présenté le comportement du code sur l'exemple de Wächter Biegler. Les expériences numériques incluent aussi des comparaisons de SPDOPT avec des solveurs bien établis qui sont IPOPT, ALGENCAN, LANCELOT-A et LANCELOT-B sur une large collection de problèmes dont la dimension est 976. Les résultats numériques montrent que SPDOPT a un comportement très compétitif à IPOPT en terme d'efficacité et robustesse sur les problèmes de petites tailles provenant de la collection Hock et Schittkowski. Pour les 509 problèmes de CUTEst, les performances de SPDOPT en terme d'efficacité sont globalement meilleures que celles de ALGENCAN et LANCELOT-B et moins bonnes que celle de IPOPT. Ces résultats mettent l'accent sur un "mauvais" traitement des contraintes d'inégalité au cours des itérations internes pour un pourcentage important des problèmes ce qui aboutit à une perte en robustesse. Des pistes de recherches pour améliorer la robustesse de SPDOPT sont décrites ci-dessous. Une dernière comparaison montre que SPDOPT se compare très bien aux trois codes sur deux collections de problèmes dégénérés.

Tandis que le comportement de SPDOPT sur les problèmes d'optimisation avec contraintes d'égalité est très satisfaisant, il reste encore du travail à faire pour améliorer sa robustesse pour la résolution des problèmes incluant des contraintes d'inégalité. Comme noté dans le chapitre 4, un grand pourcentage des échecs de SPDOPT est causé par l'algorithme des itérations internes. Une solution naturelle serait d'utiliser d'autres méthodes de globalisation notamment les techniques de filtre. Une deuxième solution serait de modifier la fonction de mérite, et plus particulièrement la fonction  $\mathcal{V}_\mu$  définie dans (4.2.8), en considérant une fonction barrière logarithmique modifiée. Notons qu'avec ce choix, les contraintes d'inégalité seront traitées directement sans l'introduction de variables d'écart. Par le biais d'une étude numérique extensive, Breitfeld et Shanno [27, 28] et Nash, Polyak et Sofer [97] ont montré que cette fonction jouit d'une meilleure performance par rapport

---

à la fonction barrière logarithmique classique.

L'amélioration des performances de SPDOPT pourrait être aussi obtenue en proposant une stratégie plus dynamique pour l'initialisation et la mise à jour des paramètres de pénalisation et barrière qui prend en compte la décroissance des conditions d'optimalité du problème.

Lorsque le problème initial est non réalisable, SPDOPT retourne un point qui minimise la mesure d'infaisabilité. Cependant, nous avons remarqué que le taux de convergence vers tel point est faible, comme d'ailleurs dans la plupart des solveurs d'optimisation. C'est pourquoi, une autre piste de recherche serait de proposer une technique qui permet de détecter rapidement que le problème est non réalisable.

Pour la solution numérique des problèmes dégénérés pour lesquels la matrice jacobienne des contraintes n'est pas de plein, nous n'avons identifié aucune perte du taux de convergence rapide de la suite des itérés vers la solution, qui semble encore être super-linéaire ou quadratique. Il serait intéressant d'analyser le comportement asymptotique de SPDOPT sur ce type de problèmes sans supposer que la condition de qualification LICQ ou MFCQ soit satisfaite. Une autre piste de recherche serait d'introduire une régularisation *primale-duale* dans le système linéaire utilisé pour générer des directions de recherche et d'étudier son impact sur les performances de SPDOPT pour les problèmes standards ainsi que dégénérés. L'introduction de cette technique de régularisation peut se faire en combinant les techniques de lagrangien augmenté et de point proximal. Pour une étude de la régularisation primale-duale dans la programmation quadratique convexe, voir Friedlander et Orban [64].

Enfin, il serait intéressant d'étendre la méthode primale-duale présentée au chapitre 4 pour résoudre les problèmes d'optimisation non linéaire semi-définie de la forme

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x) \\ & g(x) = 0, \\ & X(x) \succeq 0, \end{aligned} \tag{SDP}$$

où  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  sont des fonctions de classe  $C^2$ ,  $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{S}^p$  est un opérateur matriciel,  $\mathcal{S}^p$  désigne l'ensemble des matrices réelles symétriques d'ordre  $p$  et la notation  $X(x) \succeq 0$  signifie que  $X(x)$  est semi-définie positive. La recherche dans ce domaine est active et il y a des méthodes primales-duales qui ont déjà été proposées pour résoudre (SDP). Notons en particulier les travaux de Yamashita et Yabe [131] et Yamashita, Yabe et Harada [132].



# Annexe A

## Liste des problèmes testés

Les performances des méthodes développées dans cette thèse ont été évaluées sur une large collection de problèmes. Le tableau [A.1](#) donne la liste des problèmes d'optimisation non linéaire avec des contraintes d'égalité utilisés dans les tests numériques des chapitres [2](#) et [3](#). Ces problèmes proviennent des bibliothèques COPS [\[52\]](#) et CUTer [\[77\]](#). Le reste des tableaux donnent la liste des problèmes d'optimisation de la forme  $(P_{EI})$  utilisés dans les expériences numériques du chapitre [4](#). Les problèmes donnés dans le tableau [A.2](#) proviennent des bibliothèques Hock et Schittkowski [\[83\]](#) et Schittkowski [\[111\]](#). Les problèmes donnés dans les tableaux [A.3](#) et [A.4](#) proviennent respectivement des bibliothèques CUTEst [\[81\]](#) et MacMPEC [\[89\]](#). Pour chaque problème, nous donnons le nombre de variables  $n$  et le nombre de contraintes  $m$ .

TABLE A.1 – Liste des problèmes des bibliothèques COPS et CUTer

Problème	n	m	Problem	n	m	Problème	n	m
aug2d	20192	9996	eigencco	30	15	lukvle04	1000	998
aug3d	3873	1000	elec1	150	50	lukvle05	1000	996
aug3dc	3873	1000	elec2	300	100	lukvle06	999	499
bt01	2	1	elec3	600	200	lukvle07	1000	4
bt02	3	1	gilbert	1000	1	lukvle08	1000	998
bt03	5	3	gridnetb	13284	6724	lukvle09	1000	6
bt04	3	2	hager1	10000	5000	lukvle10	1000	998
bt05	3	2	hager2	10000	5000	lukvle11	998	664
bt06	5	2	hager3	10000	5000	lukvle12	997	747
bt07	5	3	hs006	2	1	lukvle13	998	664
bt08	5	2	hs007	2	1	lukvle14	998	664
bt09	4	2	hs009	2	1	lukvle15	997	747
bt11	5	3	hs026	3	1	lukvle16	997	747
bt12	5	3	hs027	3	1	lukvle17	997	747
byrdsphr	3	2	hs028	3	1	lukvle18	997	747
catena	3002	1001	hs039	4	2	maratos	2	1
chain1	799	600	hs040	4	3	mwright	5	3
chain2	1599	1200	hs046	5	2	orthrdm2	4003	2000
chain3	3199	2400	hs047	5	3	orthrega	517	256
dixchlng	10	5	hs048	5	2	orthregb	27	6
dtocl1na	1485	990	hs049	5	2	orthregc	10005	5000
dtocl1nb	1485	990	hs050	5	3	orthregd	10003	5000
dtocl1nc	1485	990	hs051	5	3	orthrgdm	10003	5000
dtocl1nd	735	490	hs052	5	3	orthrgds	10003	5000
dtoc2	5994	3996	hs061	3	2	robot	7	2
dtoc5	9998	4999	hs077	5	2	s216	2	1
dtoc6	10000	5000	hs078	5	3	s219	4	2
eigena2	110	55	hs079	5	3	s235	3	1
eigenaco	110	55	hs100lnp	7	2	s269	5	3
eigenb2	110	55	lukvle01	1000	998	s316	2	1
eigenbco	110	55	lukvle02	1000	993	s317	2	1
eigenc2	462	231	lukvle03	1000	2	s318	2	1
s319	2	1	s336	3	2	s375	10	9
s320	2	1	s338	3	2	s378	10	3
s321	2	1	s344	3	1	s394	20	1
s322	2	1	s345	3	1	s395	50	1
s335	3	2	s375	10	9			

# Annexe A. Liste des problèmes testés

TABLE A.2 – Liste des problèmes de la collection Hock et Shittkowski

Problème	n	m	Problème	n	m	Problème	n	m	Problème	n	m
hs010	3	1	hs072	6	2	hs35mod	3	1	s315	5	3
hs011	3	1	hs073	6	3	hs44new	9	5	s323	4	2
hs012	3	1	hs074	5	4	hs99exp	28	21	s324	4	2
hs013	3	1	hs075	5	4	s215	3	1	s325	4	3
hs014	3	2	hs076	7	3	s217	3	2	s326	4	2
hs015	4	2	hs080	5	3	s218	3	1	s327	3	1
hs016	4	2	hs081	5	3	s220	2	1	s329	5	3
hs017	4	2	hs083	8	3	s221	3	1	s330	3	1
hs018	4	2	hs084	8	3	s222	3	1	s331	3	1
hs019	4	2	hs085	41	36	s223	4	2	s332	3	1
hs020	5	3	hs086	11	6	s224	4	2	s337	4	1
hs021	3	1	hs087	9	4	s225	7	5	s339	4	1
hs022	4	2	hs088	3	1	s226	4	2	s341	4	1
hs023	7	5	hs089	4	1	s227	4	2	s342	4	1
hs024	4	2	hs090	5	1	s228	4	2	s343	5	2
hs029	4	1	hs091	6	1	s230	4	2	s346	5	2
hs030	4	1	hs092	7	1	s231	4	2	s353	6	3
hs031	4	1	hs093	8	2	s232	4	2	s354	5	1
hs032	4	2	hs095	10	4	s233	3	1	s355	4	1
hs033	5	2	hs096	10	4	s234	3	1	s357	39	35
hs034	5	2	hs097	10	4	s236	4	2	s359	19	14
hs035	4	1	hs098	10	4	s237	5	3	s360	7	2
hs036	4	1	hs099	19	14	s238	5	3	s361	11	6
hs037	4	1	hs100	11	4	s239	3	1	s365	12	5
hs041	4	1	hs100mod	11	4	s247	4	1	s366	21	14
hs042	3	1	hs101	13	6	s248	4	2	s367	10	5
hs043	7	3	hs102	13	6	s249	4	1	s369	14	6
hs044	10	6	hs103	13	6	s250	4	1	s372	21	12
hs053	5	3	hs104	14	6	s251	4	1	s374	45	35
hs054	6	1	hs106	14	6	s252	3	1	s376	24	15
hs055	6	6	hs107	9	6	s253	4	1	s377	10	3
hs056	7	4	hs108	22	13	s262	7	4	s380	15	3
hs057	3	1	hs109	13	10	s263	6	4	s381	16	4
hs059	5	3	hs111	10	3	s264	7	3	s382	16	4
hs060	3	1	hs112	10	3	s265	4	2	s383	14	1
hs062	3	1	hs113	18	8	s268	10	5	s384	25	10
hs063	3	2	hs114	18	11	s270	6	1	s385	25	10
hs064	4	1	hs116	28	15	s277	8	4	s387	26	11
hs065	4	1	hs117	20	5	s278	12	6	s388	30	15
hs066	5	2	hs118	32	17	s279	16	8	s389	30	15
hs067	10	7	hs119	16	8	s280	20	10	s392	55	25
hs070	5	1	hs21mod	8	1	s284	25	10	s393	49	3
hs071	5	2	hs268	10	5	s285	25	10			

TABLE A.3 – Liste des problèmes de la collection CUTEst

Problème	n	m	Problème	n	m	Problème	n	m
A0ENDNDL	20002	15002	AUG3DCQP	27543	8000	DECONVC	51	1
A0ENINDL	20002	15002	AUG3DQP	27543	8000	DEGENLPA	20	15
A0ENSNDL	20002	15002	AVGASA	18	10	DEGENLPB	20	15
A0ESDNDL	20002	15002	AVGASB	18	10	DEGENQPC	19650	19625
A0ESINDL	20002	15002	AVION2	49	15	DEGENQP	12505	12502
A0ESSNDL	20002	15002	BATCH	109	73	DEGTRIDL	10000	1
A0NNDNDL	25004	20004	BDRY2	25099	25049	DEMBO7	36	20
A0NNDNIL	25004	20004	BIGBANK	1922	1112	DEMYMALO	6	3
A0NNDNSL	25004	20004	BIGGSC4	11	7	DIPIGRI	11	4
A0NNSNSL	25004	20004	BLOCKQP1	10011	5001	DISC2	35	23
A0NSDSDL	25004	20004	BLOCKQP2	10011	5001	DISCS	81	66
A0NSSDS	2504	2004	BLOCKQP3	10011	5001	DITTERT	1133	1034
A0NSDSL	25004	20004	BLOCKQP4	10011	5001	DIXCHLNV	1000	500
A0NSDSSL	25004	20004	BLOCKQP5	10011	5001	DNIEPER	57	24
A0SSSSL	25004	20004	BLOWEYA	4002	2002	DRUGDISE	599	500
A2ENDNDL	20002	15002	BLOWEYB	4002	2002	DRUGDIS	6000	4000
A2ENINDL	20002	15002	BLOWEYC	4002	2002	DUAL1	85	1
A2ENSNDL	20002	15002	BRAINPC0	6905	6900	DUAL2	96	1
A2ESDNDL	20002	15002	BRAINPC1	6905	6900	DUAL3	111	1
A2ESINDL	20002	15002	BRAINPC2	13805	13800	DUAL4	75	1
A2ESSNDL	20002	15002	BRAINPC3	6905	6900	DUALC1	223	215
A2NNDNDL	25004	20004	BRAINPC4	6905	6900	DUALC2	235	229
A2NNDNIL	25004	20004	BRAINPC5	6905	6900	DUALC5	285	278
A2NNDNSL	25004	20004	BRAINPC6	6905	6900	DUALC8	510	503
A2NNSNSL	25004	20004	BRAINPC7	6905	6900	EG3	30000	20000
A2NSDSDL	25004	20004	BRAINPC8	6905	6900	EIGENA	2550	2550
A2NSDSL	25004	20004	BRAINPC9	6905	6900	EIGMAXA	101	101
A2NSDSSL	25004	20004	BRIDGEND	2734	2727	EIGMAXB	101	101
A2SSSSL	25004	20004	BRITGAS	450	360	EIGMINA	101	101
A4X12	499	385	BT13	5	1	EIGMINB	101	101
A5ENDNDL	20002	15002	BTS4	36570	36310	ELATTAR	109	102
A5ENINDL	20002	15002	BURKEHAN	2	1	EQC	10	3
A5ENSNDL	20002	15002	CAMSHAPE	2403	1603	ERRINBAR	19	9
A5ESDNDL	20002	15002	CANTILVR	6	1	EXPFITA	27	22
A5ESINDL	20002	15002	CAR2	6991	4996	EXPFITB	107	102
A5ESSNDL	20002	15002	CATMIX	2401	1600	EXPFITC	507	502
A5NNDNDL	25004	20004	CB2	6	3	EXTRASIM	2	1
A5NNDNIL	25004	20004	CB3	6	3	FCCU	19	8
A5NNDNSL	25004	20004	CBS	11163	244	FEEDLOC	327	259
A5NNSNSL	25004	20004	CHACONN1	6	3	FLETCHER	7	4
A5NSDSDL	25004	20004	CHACONN2	6	3	GASOIL	10401	10398
A5NSSDSM	2504	2004	CHANDHEQ	100	100	GAUSSELM	1255	1135
A5NSDSL	25004	20004	CHEMRCTA	5000	5000	GIGOMEZ1	6	3
A5NSDSSL	25004	20004	CHEMRCTB	5000	5000	GIGOMEZ2	6	3
A5NSSNSM	2504	2004	CLNLBEAM	5999	4000	GIGOMEZ3	6	3
A5SSSSL	25004	20004	CONCON	15	11	GILBERT	5000	1
ACOPP118	716	608	CONGIGMZ	8	5	GLIDER	5207	4808
ACOPP14	78	68	CONT5-QP	10200	10100	GMNCASE1	475	300
ACOPP300	1560	1422	CORE1	83	59	GMNCASE2	1225	1050
ACOPP30	154	142	CORE2	183	134	GMNCASE3	1225	1050
ACOPP57	288	274	CORKSCRW	4997	3500	GMNCASE4	525	350
ACOPR118	834	726	COSHFUN	8001	2000	GOFFIN	101	50
ACOPR14	92	82	C-RELOAD	426	284	GOULDQP1	32	17
ACOPR300	1860	1722	CRESC100	206	200	GOULDQP2	19999	9999
ACOPR30	184	172	CRESC132	2660	2654	GOULDQP3	19999	9999
ACOPR57	345	331	CRESC4	14	8	GPP	2998	1998
AGG	615	488	CRESC50	106	100	GRIDNETA	5144	3844
AIRPORT	126	42	CSFI1	7	4	GRIDNETC	7564	3844
ALJAZZAF	1000	1	CSFI2	7	4	GRIDNETD	5144	3844
ALLINITA	5	4	CVXQP1	50	25	GRIDNETF	7564	3844
ALLINITC	3	1	CVXQP2	50	12	GRIDNETG	5144	3844
ALLINQP	61602	25000	CVXQP3	50	36	GRIDNETI	7564	3844
ALSOTAME	2	1	DALE	16514	405	HADAMARD	1201	1010
ANTWERP	29	10	DALLASL	906	667	HAGER4	5000	2500
AUG2DCQP	20200	10000	DALLASM	196	151	HAIFAL	9301	8958
AUG2DQP	20200	10000	DALLASS	46	31	HAIFAM	249	150

# Annexe A. Liste des problèmes testés

Problème	n	m	Problème	n	m	Problème	n	m
HAIFAS	22	9	LUKVLI17	17494	7497	OET5	1007	1002
HALDMADS	48	42	LUKVLI18	17494	7497	OET6	1007	1002
HANGING	5918	2330	LUKVLI1	19998	9998	OET7	1009	1002
HATFLDH	11	7	LUKVLI3	10002	2	OPTCDEG2	4499	3000
HELSEBY	1408	1399	LUKVLI4	14999	4999	OPTCDEG3	4499	3000
HET-Z	1004	1002	LUKVLI5	19996	9996	OPTCNTRL	29	20
HIE1372D	637	525	LUKVLI6	14998	4999	OPTMASS	3507	2505
HIMMELBI	112	12	LUKVLI7	10004	4	OPTPRLOC	60	30
HIMMELBJ	43	14	LUKVLI8	19998	9998	ORBIT2	2992	2097
HIMMELBK	24	14	LUKVLI9	10006	6	ORTHREGE	7506	5000
HIMMELP2	3	1	MADSEN	9	6	ORTHREGF	4805	1600
HIMMELP3	4	2	MADSSCHJ	599	398	OSORIO	10201	202
HIMMELP4	5	3	MAKELA1	5	2	PDE1	27179	27059
HIMMELP5	5	3	MAKELA2	6	3	PDE2	36179	27059
HIMMELP6	7	5	MAKELA3	41	20	PENTAGON	21	15
HONG	4	1	MAKELA4	61	40	PFIT1	3	3
HUBFIT	3	1	MANNE	9999	4000	PFIT2	3	3
HUES-MOD	5000	2	MARINE	11215	11192	PFIT3	3	3
HUESTIS	5000	2	MATRIX2	8	2	PFIT4	3	3
HVYCRASH	4002	3000	MCONCON	15	11	PINENE	8800	8795
HYDROELL	2015	1008	METHANOL	12002	11997	POLAK1	5	2
HYDROELM	1007	504	MIFFLIN1	5	2	POLAK2	13	2
HYDROELS	335	168	MIFFLIN2	5	2	POLAK3	22	10
JANNSON3	20002	3	MINC44	1103	1032	POLAK4	6	3
JANNSON4	10002	2	MINMAXBD	25	20	POLAK5	5	2
JJTABEL3	3025	1650	MINMAXRB	7	4	POLAK6	9	4
KISSING2	719	625	MINPERM	1113	1033	POLYGON	5247	5049
KISSING	988	903	MISTAKE	22	13	PORTFL1	12	1
KIWCRESC	5	2	MOSARQP1	3200	700	PORTFL2	12	1
KSIP	1021	1001	MOSARQP2	3200	700	PORTFL3	12	1
LAKES	90	78	MPC10	2801	2351	PORTFL4	12	1
LAUNCH	44	28	MPC11	2801	2351	PORTFL6	12	1
LEAKNET	156	153	MPC12	2801	2351	PORTSNQP	10000	2
LEUVEN1	2534	2220	MPC13	2801	2351	PORTSQP	10000	1
LEUVEN2	2782	2329	MPC14	2801	2351	POWELL20	10000	5000
LEUVEN3	4144	2973	MPC15	2801	2351	PRIMAL1	410	85
LEUVEN4	4144	2973	MPC16	2801	2351	PRIMAL2	745	96
LEUVEN5	4144	2973	MPC1	4483	3833	PRIMAL3	856	111
LEUVEN6	4262	3091	MPC2	2801	2351	PRIMAL4	1564	75
LEUVEN7	1306	946	MPC3	2801	2351	PRIMALC1	239	9
LIN	4	2	MPC4	2801	2351	PRIMALC2	238	7
LINSPANH	81	33	MPC5	2801	2351	PRIMALC5	295	8
LIPPERT1	60201	50000	MPC6	2801	2351	PRIMALC8	528	8
LIPPERT2	60201	50000	MPC7	2801	2351	PRODPL0	69	29
LISWET10	4002	2000	MPC8	2801	2351	PRODPL1	69	29
LISWET11	4002	2000	MPC9	2801	2351	PT	503	501
LISWET12	4002	2000	MRIBASIS	70	55	QC	11	4
LISWET1	4002	2000	NASH	18	24	QPBAND	75000	25000
LISWET2	4002	2000	NCVXQP1	10	5	QPCBLEND	114	74
LISWET3	4002	2000	NCVXQP2	10	5	QPCBOEI1	726	351
LISWET4	4002	2000	NCVXQP3	10	5	QPCBOEI2	305	166
LISWET5	4002	2000	NCVXQP4	10	2	QPCSTAIR	532	356
LISWET6	4002	2000	NCVXQP5	10	2	QPNBAND	75000	25000
LISWET7	4002	2000	NCVXQP6	10	2	QPNBLEND	114	74
LISWET8	4002	2000	NCVXQP7	10	6	QPNBOEI1	726	351
LISWET9	4002	2000	NCVXQP8	10	6	QPNBOEI2	305	166
LOADBAL	51	31	NCVXQP9	10	6	QPNSTAIR	532	356
LOOTSMA	5	2	NET1	62	57	QR3D	610	610
LOTSCHD	12	7	NET2	170	160	RDW2D52F	98	49
LSNNODOC	5	4	NET3	554	521	READING1	4001	2000
LSQFIT	3	1	NET4	79776	75024	READING2	6001	4000
LUKVLI10	19998	9998	NGONE	5245	5048	READING3	4002	2001
LUKVLI11	16662	6664	NUFFIELD	434	350	READING4	10000	5000
LUKVLI12	17494	7497	ODFITS	10	6	READING5	5000	5000
LUKVLI13	16662	6664	OET1	1005	1002	READING6	101	50
LUKVLI14	16662	6664	OET2	1005	1002	READING7	1001	500
LUKVLI15	17494	7497	OET3	1006	1002	READING8	2001	1000
LUKVLI16	17494	7497	OET4	1006	1002	READING9	10001	5000



# Annexe A. Liste des problèmes testés

Problème	n	m	Problème	n	m	Problème	n	m
RES	22	14	STEENBRA	432	108	TRO11X3	151	61
RK23	17	11	STEENBRB	468	108	TRO21X5	541	201
ROBOTARM	4400	3202	STEENBRC	540	126	TRO3X3	31	13
ROBOT	7	2	STEENBRD	468	108	TRO41X9	2041	721
ROCKET	2403	2002	STEENBRE	540	126	TRO4X4	64	25
ROSENMMX	9	4	STEENBRF	468	108	TRO5X5	109	41
ROTDISC	1253	1081	STEENBRG	540	126	TRO6X2	46	21
S268	10	5	STEERING	1999	1600	TRUSPYR1	12	4
S277-280	8	4	STNQP1	8193	4095	TRUSPYR2	19	11
SAROMM	5840	5110	STNQP2	8193	4095	TRY-B	2	1
SARO	4744	4015	SUPERSIM	2	2	TWIRIBG1	3444	1239
SAWPATH	777	774	SVANBERG	10000	5000	TWIRIMD1	1438	712
SEMICON1	5000	5000	SWOPF	97	92	TWIRISM1	432	313
SEMICON2	5000	5000	SYNTHES1	12	6	TWOBARS	4	2
SIMPLLPB	4	2	SYNTHES2	24	14	TWOD	4	2
SIMPLLPB	5	3	SYNTHES3	38	23	UBH1	8997	6000
SINROSNB	1999	999	TABLE1	1584	510	UBH5	4997	3500
SIPOW1M	2002	2000	TABLE3	4992	2464	VANDERM1	199	199
SIPOW1	2002	2000	TABLE4	4992	2464	VANDERM2	199	199
SIPOW2M	2002	2000	TABLE5	4992	2464	VANDERM3	199	199
SIPOW2	2002	2000	TABLE6	1584	510	WACHBIEG	3	2
SIPOW3	2004	2000	TABLE7	624	230	WATER	31	10
SIPOW4	2004	2000	TABLE8	1271	72	WOMFLET	6	3
SMBANK	117	64	TAME	2	1	YAO	4000	2000
SMMPSPF	743	263	TARGUS	162	63	YORKNET	312	256
SNAKE	4	2	TENBARS1	19	9	ZAMB2-10	264	96
SOSQP1	5000	2501	TENBARS2	18	8	ZAMB2-11	264	96
SOSQP2	5000	2501	TENBARS3	18	8	ZAMB2-8	132	48
SPIRAL	5	2	TENBARS4	19	9	ZAMB2-9	132	48
SREADIN3	4002	2001	TFI1	104	101	ZAMB2	3960	1440
SSEBLIN	216	72	TFI2	104	101	ZECEVIC2	4	2
SSEBNLN	216	96	TFI3	104	101	ZECEVIC3	4	2
SSNLBEAM	3001	2000	TOYSARAH	2890	1649	ZECEVIC4	4	2
STANCMIN	5	2	TRAINF	4000	2002	ZIGZAG	3498	2500
STCQP1	8193	4095	TRAINH	4000	2002	ZY2	5	2
STCQP2	8193	4095	TRIMLOSS	197	75			

## Annexe A. Liste des problèmes testés

TABLE A.4 – Liste des problèmes de la collection MacMPEC

Problème	n	m	Problème	n	m	Problème	n	m
bar-truss-3	41	34	ex9.1.6	20	13	outrata31	9	4
bard1	8	4	ex9.1.7	23	15	outrata32	9	4
bard1m	9	4	ex9.1.8	15	9	outrata33	9	4
bard2	16	9	ex9.1.9	17	11	outrata34	9	4
bard2m	16	9	ex9.2.1	14	9	pack-comp1-8	179	121
bard3	8	5	ex9.2.2	13	8	pack-comp1c-8	186	128
bard3m	10	5	ex9.2.3	19	13	pack-comp2c-8	186	128
bilevel1	17	9	ex9.2.4	10	7	pack-rig1-8	127	86
bilevel2	25	13	ex9.2.5	11	7	pack-rig1c-8	134	93
bilevel3	15	10	ex9.2.6	22	12	pack-rig1p-8	160	104
bilin	15	7	ex9.2.7	14	9	pack-rig2-8	123	84
dempe	4	2	ex9.2.8	8	5	pack-rig2c-8	130	91
design-cent-1	17	11	ex9.2.9	12	8	pack-rig2p-8	156	102
design-cent-2	22	15	gauvin	5	2	portfl-i-1	99	25
design-cent-4	32	20	hs044-i	30	14	qpec1	50	20
design-init-1	4	2	incid-set1-8	188	120	qpec2	50	20
design-init-2	4	2	incid-set1c-8	194	126	ralphmod	204	100
design-init-3	4	2	incid-set2-8	187	119	scholtes1	4	1
design-init-4	1	0	incid-set2c-8	194	126	scholtes2	4	1
desilva	8	4	jr1	3	1	scholtes3	3	1
df1	5	3	jr2	3	1	scholtes5	5	2
ex9.1.1	18	12	kth1	3	1	sl1	11	5
ex9.1.10	15	9	kth2	3	1	stackelberg1	4	2
ex9.1.2	10	7	kth3	3	1	tap-09	122	68
ex9.1.3	29	21	nash1	8	4	tap-15	293	167
ex9.1.4	10	7	nash1a	8	4	water-net	80	50
ex9.1.5	18	12						



## Annexe B

# Résultats numériques de SPDOPT

Nous présentons dans cette annexe les résultats numériques obtenus avec SPDOPT sur l'ensemble des problèmes donnés dans les tableaux A.1-A.4. Le tableau B.2 donne les résultats de SPDOPT-QP utilisés dans les comparaisons du chapitre 2 alors que les tableaux B.3 et B.4 donnent respectivement les résultats de SPDOPT-AL et SPDOPT-QP utilisés dans celles du chapitre 3. Les tableaux B.5-B.8 énumèrent les résultats de SPDOPT-AL utilisés dans l'étude numérique du chapitre 4. Pour chaque problème, nous donnons les nombres suivants : nombre d'évaluations de fonctions (#f) et de gradients (#g), nombre de factorisations (#fact)<sup>14</sup>, valeur finale de la fonction objectif (f), temps CPU en secondes (CPU). Un nombre positif dans la colonne (e) indique un échec. Le tableau B.1 donne les différents types d'erreurs retournées par SPDOPT-AL et SPDOPT-QP.

e	Message d'erreur
1	Nombre maximum d'itérations atteint
2	Temps CPU maximum dépassé
3	Direction de recherche devient trop petite
4	Correction de l'inertie échoue
5	Convergence vers un point non réalisable
6	Valeur de la fonction objectif dépasse la valeur limite
7	Norme des conditions d'optimalité dépasse la valeur limite

TABLE B.1 – Les messages d'erreur retournés par SPDOPT-AL et SPDOPT-QP

---

14. Le nombre de factorisations n'est donné que pour les problèmes de la forme ( $P_E$ ).

TABLE B.2 – Résultats de SPDOPT-QP sur des problèmes d'égalité de CUTER et COPS (chapitre 2)

Problème	Problèmes standards					Problèmes dégénérés				
	#f/#g	#fact	f	CPU	e	#f/#g	#fact	f	CPU	e
aug2d	2/2	1	1.7e+06	0.14		7/7	6	1.7e+06	0.86	
aug3d	2/2	1	5.5e+02	0.26		7/7	11	5.5e+02	1.20	
aug3dc	2/2	1	7.7e+02	0.03		5/5	4	7.7e+02	0.10	
bt01	11/11	18	-1.0e+00	0.00		13/13	24	-1.0e+00	0.00	7
bt02	12/12	11	3.3e-02	0.00		35/31	92	5.6e+00	0.00	
bt03	2/2	1	4.1e+00	0.00		16/16	22	4.1e+00	0.00	
bt04	11/11	15	-4.6e+00	0.00		67/51	91	-4.6e+00	0.00	
bt05	9/9	8	9.6e+02	0.00		17/17	28	9.6e+02	0.00	
bt06	15/15	20	2.8e-01	0.00		41/37	91	2.8e-01	0.00	
bt07	39/32	59	3.6e+02	0.00		81/65	138	3.6e+02	0.00	
bt08	70/70	172	1.0e+00	0.00		78/78	191	1.0e+00	0.00	
bt09	10/10	13	-1.0e+00	0.00		32/26	42	-1.0e+00	0.00	
bt11	10/10	9	8.2e-01	0.00		26/24	42	8.2e-01	0.00	
bt12	7/7	11	6.2e+00	0.00		10/9	15	6.2e+00	0.00	
byrdsphr	13/12	22	-4.7e+00	0.00		35/30	68	-4.7e+00	0.00	
catena	31/28	31	-2.1e+00	0.25		59/53	76	-2.1e+00	0.54	
chain1	15/15	21	5.1e+00	0.08		15/15	21	5.1e+00	0.08	
chain2	32/31	45	5.1e+00	0.35		17/17	21	5.1e+00	0.16	
chain3	18/18	25	5.1e+00	0.40		18/18	25	5.1e+00	0.39	
dixchlng	29/27	71	1.8e+03	0.00		3381/758	2282	2.1e+06	0.13	3
dtoc1na	7/7	6	1.3e+01	0.19		7/7	6	1.3e+01	0.22	
dtoc1nb	9/9	8	1.6e+01	0.26		9/9	8	1.6e+01	0.26	
dtoc1nc	11/11	17	2.5e+01	0.41		11/11	17	2.5e+01	0.37	
dtoc1nd	105/89	194	1.2e+01	1.95		90/62	131	1.3e+01	1.43	
dtoc2	14/14	26	5.0e-01	2.70		525/145	289	5.0e-01	16.12	
dtoc5	5/5	4	1.5e+00	0.12		10/10	9	1.5e+00	0.26	
dtoc6	20/20	19	1.3e+05	0.55		23/23	31	1.3e+05	0.74	
eigena2	9/9	14	7.5e-30	0.05		9/9	14	1.4e-29	0.04	
eigenaco	11/11	15	1.8e-31	0.07		12/12	20	7.9e-31	0.09	
eigenb2	10/10	22	1.8e+01	0.07		10/10	22	1.8e+01	0.07	
eigenbco	224/151	323	1.3e-23	1.87		114/101	234	1.0e-25	1.27	
eigenc2	87/85	203	4.2e-21	8.72		212/191	459	4.1e-28	26.81	
eigencco	14/14	24	2.2e-21	0.01		71/48	81	5.0e-31	0.03	
elec1	38/38	85	1.1e+03	0.58		1182/356	425	1.1e+03	3.59	
elec2	57/57	127	4.4e+03	4.22		5804/872	1234	4.4e+03	56.14	
elec3	111/96	210	1.8e+04	31.89		256/165	403	1.8e+04	60.97	
gilbert	19/19	18	4.8e+02	0.04		56/56	161	4.8e+02	43.22	
gridnetb	2/2	1	1.4e+02	0.10		10/10	9	1.4e+02	0.67	
hager1	2/2	1	8.8e-01	0.03		22/22	21	8.8e-01	0.35	
hager2	2/2	1	4.3e-01	0.87		17/17	16	4.3e-01	0.51	
hager3	2/2	1	1.4e-01	0.05		17/17	16	1.4e-01	0.62	
hs006	6/6	6	0.0e+00	0.00		8030/459	1107	3.9e-28	0.02	
hs007	9/9	8	-1.7e+00	0.00		66/42	76	-1.7e+00	0.00	
hs009	13/13	23	-5.0e+00	0.00		6/6	5	-5.0e+00	0.00	
hs026	28/28	27	1.4e-16	0.00		77/76	184	2.2e-17	0.00	
hs027	11/11	13	4.0e-02	0.00		20/20	33	4.0e-02	0.00	
hs028	2/2	1	9.9e-31	0.00		2/2	1	2.2e-30	0.00	
hs039	10/10	13	-1.0e+00	0.00		27/26	43	-1.0e+00	0.00	
hs040	5/5	4	-2.5e+00	0.00		6/6	5	-2.5e+00	0.00	
hs046	23/23	22	1.2e-15	0.00		28/28	43	6.1e-16	0.00	
hs047	34/33	46	5.8e-14	0.00		73/62	120	-2.7e+00	0.00	
hs048	2/2	1	1.1e-29	0.00		2/2	1	7.9e-31	0.00	
hs049	21/21	20	2.1e-12	0.00		21/21	20	2.1e-12	0.00	
hs050	10/10	9	1.2e-32	0.00		10/10	9	1.2e-32	0.00	
hs051	2/2	1	5.9e-31	0.00		2/2	1	3.9e-31	0.00	
hs052	2/2	1	5.3e+00	0.00		12/12	12	5.3e+00	0.00	
hs061	23/23	23	-1.4e+00	0.00		22/20	38	-1.4e+00	0.00	
hs077	12/12	16	2.4e-01	0.00		26/26	58	2.4e-01	0.00	
hs078	6/6	5	-2.9e+00	0.00		13/13	17	-2.9e+00	0.00	
hs079	17/16	15	7.9e-02	0.00		18/17	28	7.9e-02	0.00	
hs100lmp	14/13	21	6.8e+02	0.00		17425/2823	6979	6.8e+02	0.22	
lukvle01	10/10	9	6.2e+00	0.06		15/14	27	6.2e+00	0.12	
lukvle02	10/10	9	2.8e+04	0.09		33/32	79	2.8e+04	0.42	
lukvle03	11/11	10	1.4e+01	0.03		53/48	105	1.4e+01	0.16	
lukvle04	13/13	12	3.5e+03	0.07		881/338	418	2.6e+09	2.03	6

# Annexe B. Résultats numériques de SPDOPT

Problème	Problèmes standards					Problèmes dégénérés				
	#f/#g	#fact	f	CPU	e	#f/#g	#fact	f	CPU	e
lukvle05	49/38	59	4.1e+00	0.32		71/64	150	4.1e+00	0.71	
lukvle06	16/16	15	6.3e+04	0.14		98/56	94	6.3e+04	0.65	
lukvle07	10/10	16	-1.1e+00	0.02		24/23	51	-1.1e+00	0.05	
lukvle08	14/13	21	-9.8e+00	0.09		14/13	22	-9.8e+00	0.08	
lukvle09	24/24	42	1.0e+02	0.03		3/2	4	5.1e+02	0.00	7
lukvle10	14/14	17	3.5e+02	0.07		3/3	2	1.0e+03	0.01	7
lukvle11	12/12	11	4.9e-32	0.04		123/73	164	7.6e-28	0.37	
lukvle12	9/9	8	1.5e+03	0.05		19/18	22	1.5e+03	0.14	
lukvle13	76/67	155	3.1e+03	0.63		73/45	76	3.1e+03	0.35	
lukvle14	25/25	29	5.2e+03	0.11		24102/3002	7601	1.3e+04	21.28	1
lukvle15	1703/561	1319	5.1e+01	3.74		5698/2071	4972	1.8e+01	13.29	
lukvle16	9/9	8	3.5e+01	0.03		15/13	19	3.5e+01	0.06	
lukvle17	13/13	18	1.0e+03	0.04		35/33	74	1.0e+03	0.15	
lukvle18	13/13	19	1.0e+03	0.05		23/21	41	1.0e+03	0.08	
maratos	5/5	4	-1.0e+00	0.00		8/8	7	-1.0e+00	0.00	
mwright	21/21	33	1.3e+00	0.00		28/26	43	1.3e+00	0.00	
orthrdm2	16/16	33	1.6e+02	0.46		29/29	43	1.7e+02	0.70	
orthrega	145/91	207	1.4e+03	0.90		15318/3002	7580	2.8e+03	16.59	1
orthregb	17/16	34	7.1e-18	0.00		56/52	129	5.1e-21	0.02	
orthregc	34/32	61	1.9e+02	10.48		14/14	25	1.9e+02	2.28	
orthregd	18/18	33	1.5e+03	1.34		48/46	102	2.2e+03	3.80	
orthrgdm	18/17	31	1.5e+03	1.24		34/34	73	1.5e+03	4.21	
orthrgds	23/22	40	1.5e+03	1.66		22031/3002	3058	5.2e+03	249.36	1
robot	13/13	29	6.6e+00	0.00		140/100	222	5.5e+00	0.01	
s216	9/9	8	1.0e+00	0.00		17/16	28	1.0e+00	0.00	
s219	12/12	15	-1.0e+00	0.00		62/55	142	-1.0e+00	0.00	
s235	27/16	15	4.0e-02	0.00		26/23	56	4.0e-02	0.00	
s269	2/2	1	4.1e+00	0.00		12/12	11	4.1e+00	0.00	
s316	8/8	7	3.3e+02	0.00		13/12	21	3.3e+02	0.00	
s317	8/8	7	3.7e+02	0.00		19/17	18	3.7e+02	0.00	
s318	8/8	7	4.1e+02	0.00		17/16	21	4.1e+02	0.00	
s319	9/9	8	4.5e+02	0.00		21/21	34	4.5e+02	0.00	
s320	11/11	10	4.9e+02	0.00		25/25	39	4.9e+02	0.00	
s321	12/12	11	5.0e+02	0.00		35/26	31	5.0e+02	0.00	
s322	12/12	11	5.0e+02	0.00		12/12	11	5.0e+02	0.00	
s335	15/15	14	-4.5e+00	0.00		72/65	168	-4.5e+00	0.00	
s336	12/12	15	-3.4e+00	0.00		13/13	16	-3.4e+00	0.00	
s338	25/24	49	-7.2e+00	0.00		42/31	63	-1.1e+00	0.00	
s344	7/7	6	3.3e-02	0.00		40/37	99	3.3e-02	0.00	
s345	19/18	18	3.3e-02	0.00		68/65	185	2.2e+00	0.00	
s375	25/23	46	-1.5e+00	0.00		20/17	31	-1.5e+00	0.00	
s378	18/18	26	-4.8e+00	0.00		116/43	105	-4.8e+00	0.01	6
s394	16/16	24	1.9e+00	0.00		73/68	173	1.9e+00	0.02	
s395	16/16	26	1.9e+00	0.00		150/102	178	1.9e+00	0.09	

TABLE B.3 – Résultats de SPDOPT-AL sur des problèmes d'égalité de CUTer et COPS

Problème	Problèmes standards					Problèmes dégénérés				
	#f/#g	#fact	f	CPU	e	#f/#g	#fact	f	CPU	e
aug2d	2/2	1	1.7e+06	0.14		9/9	8	1.7e+06	1.06	
aug3d	2/2	1	5.5e+02	0.25		6/6	9	5.5e+02	1.06	
aug3dc	2/2	1	7.7e+02	0.02		7/7	6	7.7e+02	0.12	
bt01	15/15	26	-1.0e+00	0.00		14/14	24	-1.0e+00	0.00	
bt02	12/12	11	3.3e-02	0.00		61/57	186	3.3e-02	0.00	
bt03	2/2	1	4.1e+00	0.00		22/17	22	4.1e+00	0.00	
bt04	11/11	15	-4.6e+01	0.00		43/37	84	-4.6e+01	0.00	
bt05	9/9	8	9.6e+02	0.00		14/14	24	9.6e+02	0.00	
bt06	15/15	20	2.8e-01	0.00		23/21	37	2.8e-01	0.00	
bt07	34/27	47	3.6e+02	0.00		29/28	58	3.1e+02	0.00	
bt08	146/146	370	1.0e+00	0.01		3002/3002	7591	1.1e+00	0.09	5
bt09	10/10	13	-1.0e+00	0.00		19/19	34	-1.0e+00	0.00	
bt11	10/10	9	8.2e-01	0.00		30/29	69	8.2e-01	0.00	
bt12	7/7	11	6.2e+00	0.00		9/9	12	6.2e+00	0.00	
byrdsphr	12/12	21	-4.7e+00	0.00		28/22	49	-4.7e+00	0.00	
catena	28/26	29	-2.1e+06	0.22		43/42	49	-2.1e+06	0.34	
chain1	11/11	13	5.1e+00	0.06		11/11	13	5.1e+00	0.05	
chain2	10/10	13	5.1e+00	0.10		10/10	13	5.1e+00	0.10	
chain3	12/12	15	5.1e+00	0.22		12/12	15	5.1e+00	0.22	
dixchlng	7564/2122	5956	3.2e+08	0.28	3	94/85	191	1.4e+03	0.02	
dtoc1na	7/7	6	1.3e+01	0.15		7/7	6	1.3e+01	0.15	
dtoc1nb	9/9	8	1.6e+01	0.20		9/9	8	1.6e+01	0.20	
dtoc1nc	11/11	17	2.5e+01	0.30		11/11	17	2.5e+01	0.30	
dtoc1nd	39/32	65	1.3e+01	0.57		32/30	61	1.3e+01	0.52	
dtoc2	15/15	24	5.0e-01	1.93		15/15	24	5.0e-01	2.92	
dtoc5	7/7	6	1.5e+00	0.16		14/12	15	1.5e+00	0.34	
dtoc6	23/23	22	1.3e+05	0.54		22/22	21	1.3e+05	0.52	
eigena2	3/3	2	4.7e-30	0.01		3/3	2	4.8e-30	0.01	
eigenaco	13/13	22	1.0e-34	0.07		13/13	22	3.2e-30	0.07	
eigenb2	11/11	24	1.8e+01	0.06		11/11	24	1.8e+01	0.07	
eigenbco	158/117	249	1.8e-24	1.21		88/55	110	7.6e-30	0.48	
eigenc2	21/20	38	3.4e-19	2.22		24/24	55	9.9e-28	3.44	
eigencco	14/14	24	1.3e-21	0.01		17/17	32	2.5e-30	0.02	
elec1	36/36	79	1.1e+03	0.46		67/66	164	1.1e+03	0.94	
elec2	57/57	127	4.4e+03	3.78		138/131	311	4.4e+03	8.91	
elec3	144/120	282	1.8e+04	38.77		115/103	245	1.8e+04	32.64	
gilbert	19/19	18	4.8e+02	0.03		58/54	153	4.8e+02	44.76	
gridnetb	2/2	1	1.4e+02	0.09		7/7	6	1.4e+02	0.42	
hager1	2/2	1	8.8e-01	0.03		21/21	20	8.8e-01	0.31	
hager2	2/2	1	4.3e-01	0.86		5/5	4	4.3e-01	5.16	
hager3	2/2	1	1.4e-01	0.05		5/5	4	1.4e-01	0.14	
hs006	6/6	6	0.0e+00	0.00		855/186	450	2.1e-30	0.01	
hs007	9/9	8	-1.7e+00	0.00		64/56	120	-1.7e+00	0.00	
hs009	13/13	23	-5.0e-01	0.00		6/6	5	-5.0e-01	0.00	
hs026	28/28	27	1.8e-16	0.00		175/137	230	3.5e-18	0.00	
hs027	8/8	7	4.0e-02	0.00		21/19	25	4.0e-02	0.00	
hs028	2/2	1	9.9e-31	0.00		2/2	1	2.2e-30	0.00	
hs039	10/10	13	-1.0e+00	0.00		16/16	23	-1.0e+00	0.00	
hs040	6/6	5	-2.5e-01	0.00		6/6	5	-2.5e-01	0.00	
hs046	24/24	23	4.6e-16	0.00		25/25	27	5.3e-16	0.00	
hs047	20/20	19	3.3e-14	0.00		35/30	50	1.3e-14	0.00	
hs048	2/2	1	1.1e-29	0.00		2/2	1	7.9e-31	0.00	
hs049	21/21	20	2.1e-12	0.00		21/21	20	2.1e-12	0.00	
hs050	10/10	9	6.4e-29	0.00		10/10	9	4.4e-29	0.00	
hs051	2/2	1	5.9e-31	0.00		2/2	1	3.9e-31	0.00	
hs052	2/2	1	5.3e+00	0.00		13/13	17	5.3e+00	0.00	
hs061	23/23	23	-1.4e+02	0.00		31/19	36	-1.4e+02	0.00	
hs077	11/11	15	2.4e-01	0.00		20/20	35	2.4e-01	0.00	
hs078	6/6	5	-2.9e+00	0.00		8/8	11	-2.9e+00	0.00	
hs079	13/13	12	2.8e+01	0.00		17/16	28	7.9e-02	0.00	
hs100lnp	14/13	21	6.8e+02	0.00		52/45	118	6.8e+02	0.00	
lukvle01	9/9	8	6.2e+00	0.04		10/10	9	6.2e+00	0.04	
lukvle02	10/10	9	2.8e+04	0.07		19/19	28	2.8e+04	0.16	
lukvle03	11/11	10	1.4e+01	0.02		29/25	35	1.4e+01	0.05	
lukvle04	13/13	12	3.5e+03	0.05		40/35	65	3.5e+03	0.21	

# Annexe B. Résultats numériques de SPDOPT

Problème	Problèmes standard					Problèmes dégénérés				
	#f/#g	#fact	f	CPU	e	#f/#g	#fact	f	CPU	e
lukvle05	27/27	39	4.1e+00	0.18		52/51	145	4.1e+00	0.58	
lukvle06	16/16	15	6.3e+04	0.11		24/23	36	6.3e+04	0.20	
lukvle07	10/10	16	-1.1e+03	0.02		28/28	50	-1.1e+03	0.04	
lukvle08	22/21	31	-9.8e+04	0.10		28/25	42	-9.8e+04	0.14	
lukvle09	33/30	62	1.0e+02	0.03		3/2	4	5.1e+02	0.00	7
lukvle10	15/15	18	3.5e+02	0.08		3/3	2	1.0e+03	0.01	7
lukvle11	12/12	11	6.2e-32	0.03		60/48	119	3.5e+00	0.09	
lukvle12	16/16	18	1.5e+03	0.09		19/18	21	1.5e+03	0.12	
lukvle13	24/24	34	3.1e+03	0.15		38/30	54	3.1e+03	0.23	
lukvle14	25/25	29	5.2e+03	0.09		302/135	252	6.1e+03	0.66	
lukvle15	33/32	67	4.8e-18	0.17		154/122	296	3.2e+01	0.70	
lukvle16	9/9	8	3.5e+01	0.02		14/12	17	3.5e+01	0.04	
lukvle17	11/11	20	1.0e+03	0.04		29/27	50	1.0e+03	0.09	
lukvle18	12/12	11	1.0e+03	0.02		27/20	32	1.0e+03	0.06	
maratos	6/6	5	-1.0e+00	0.00		7/7	6	-1.0e+00	0.00	
mwright	14/14	17	2.5e+01	0.00		20/19	33	2.5e+01	0.00	
orthrdm2	12/12	22	1.6e+02	0.33		174/122	138	1.7e+02	2.38	3
orthrega	99/82	180	1.4e+03	0.71		4206/1421	3761	1.4e+03	0.71	
orthregb	14/14	29	3.1e-17	0.01		665/207	519	4.0e-19	0.08	
orthregc	26/25	52	1.9e+02	10.46		17/17	34	1.9e+02	3.95	
orthregd	18/15	28	1.5e+03	0.89		138/134	180	1.5e+03	8.55	
orthrgdm	16/16	32	1.5e+03	1.10		67/65	98	1.5e+03	6.73	
orthrgds	22/20	40	1.5e+03	1.25		917/417	1022	1.5e+03	59.03	
robot	19/19	44	6.6e+00	0.00		96/90	201	5.5e+00	0.01	
s216	10/10	9	1.0e+00	0.00		16/15	20	1.0e+00	0.00	
s219	12/12	15	-1.0e+00	0.00		248/174	409	-1.0e+00	0.01	
s235	22/15	14	4.0e-02	0.00		1606/267	310	4.0e-02	0.00	
s269	2/2	1	4.1e+00	0.00		13/13	17	4.1e+00	0.00	
s316	9/9	8	3.3e+02	0.00		19/14	19	3.3e+02	0.00	
s317	9/9	8	3.7e+02	0.00		14/14	18	3.7e+02	0.00	
s318	9/9	8	4.1e+02	0.00		14/14	17	4.1e+02	0.00	
s319	9/9	8	4.5e+02	0.00		16/16	20	4.5e+02	0.00	
s320	11/11	10	4.9e+02	0.00		21/17	17	4.9e+02	0.00	
s321	12/12	11	5.0e+02	0.00		18/18	17	5.0e+02	0.00	
s322	13/13	12	5.0e+02	0.00		17/15	15	5.0e+02	0.00	
s335	15/15	14	-4.5e-03	0.00		65/61	173	-4.5e-03	0.00	
s336	11/11	14	-3.4e-01	0.00		11/11	14	-3.4e-01	0.00	
s338	21/21	40	-7.2e+00	0.00		20/20	39	-7.2e+00	0.00	
s344	7/7	6	3.3e-02	0.00		39/34	91	3.3e-02	0.00	
s345	19/18	18	3.3e-02	0.00		59/55	90	3.3e-02	0.01	
s375	24/21	44	-1.5e+01	0.00		36/31	70	-1.5e+01	0.01	
s378	19/19	29	-4.8e+01	0.01		84/67	172	-4.8e+01	0.01	
s394	15/15	20	1.9e+00	0.00		341/233	470	1.9e+00	0.04	
s395	17/17	27	1.9e+00	0.00		126/96	222	1.9e+00	0.10	



TABLE B.4 – Résultats de SPDOPT-QP sur des problèmes d'égalité de CUTER et COPS (chapitre 3)

Problème	Problèmes standards					Problèmes dégénérés				
	#f/#g	#fact	f	CPU	e	#f/#g	#fact	f	CPU	e
aug2d	2/2	1	1.7e+06	0.15		8/8	7	1.7e+06	1.00	
aug3d	2/2	1	5.5e+02	0.25		7/7	11	5.5e+02	1.21	
aug3dc	2/2	1	7.7e+02	0.03		6/6	5	7.7e+02	0.12	
bt01	17/17	32	-1.0e+00	0.00		17/17	31	-1.0e+00	0.00	
bt02	12/12	11	3.3e-02	0.00		71/66	167	3.3e-02	0.00	
bt03	2/2	1	4.1e+00	0.00		15/15	14	4.1e+00	0.00	
bt04	11/11	15	-4.6e+00	0.00		61/46	79	-4.6e+00	0.00	
bt05	9/9	8	9.6e+02	0.00		13/13	18	9.6e+02	0.00	
bt06	15/15	20	2.8e-01	0.00		20/17	30	2.8e-01	0.00	
bt07	34/30	47	3.6e+02	0.00		22/22	39	3.6e+02	0.00	
bt08	72/72	177	1.0e+00	0.00		76/76	186	1.0e+00	0.00	
bt09	10/10	13	-1.0e+00	0.00		36/34	84	-1.0e+00	0.00	
bt11	10/10	9	8.2e-01	0.00		2194/473	496	8.2e-01	0.02	
bt12	7/7	11	6.2e+00	0.00		12/11	14	6.2e+00	0.00	
byrdsphr	17/15	28	-4.7e+00	0.00		26/23	49	-4.7e+00	0.00	
catena	34/29	32	-2.1e+00	0.23		54/48	59	-2.1e+00	0.42	
chain1	10/10	12	5.1e+00	0.05		10/10	12	5.1e+00	0.05	
chain2	12/12	14	5.1e+00	0.11		12/12	14	5.1e+00	0.11	
chain3	21/18	23	5.1e+00	0.36		21/18	23	5.1e+00	0.35	
dixchlng	16073/3002	3114	1.8e+06	0.31	1	42/37	85	1.1e+03	0.01	
dtoc1na	7/7	6	1.3e+01	0.19		7/7	6	1.3e+01	0.19	
dtoc1nb	9/9	8	1.6e+01	0.25		9/9	8	1.6e+01	0.26	
dtoc1nc	24/23	45	2.5e+01	0.86		22/22	37	2.5e+01	0.75	
dtoc1nd	107/89	189	1.3e+01	1.94		120/95	198	1.3e+01	1.94	
dtoc2	32/22	36	5.0e-01	3.54		97/49	66	5.0e-01	5.57	
dtoc5	5/5	4	1.5e+00	0.14		11/11	10	1.5e+00	0.28	
dtoc6	20/20	19	1.3e+05	0.53		24/23	22	1.3e+05	0.59	
eigena2	9/9	14	7.3e-30	0.04		9/9	14	7.3e-30	0.04	
eigenaco	11/11	15	2.8e-29	0.06		11/11	15	3.4e-29	0.06	
eigenb2	10/10	20	1.8e+01	0.05		10/10	20	1.8e+01	0.06	
eigenbco	222/128	271	5.1e-19	1.54		86/60	120	5.4e-29	0.56	
eigenc2	34/32	64	4.7e-26	3.81		50/47	102	8.2e-29	6.26	
eigencco	14/14	24	1.1e-21	0.01		74/49	82	1.7e-26	0.04	
elec1	44/41	90	1.1e+03	0.61		51/39	86	1.1e+03	0.58	
elec2	57/57	127	4.4e+03	4.17		213/113	273	4.4e+03	8.95	
elec3	119/101	231	1.8e+04	34.28		2497/638	1593	1.8e+04	251.72	
gilbert	19/19	18	4.8e+02	0.04		52/52	156	4.8e+02	41.11	
gridnetb	2/2	1	1.4e+02	0.10		10/10	9	1.4e+02	0.65	
hager1	2/2	1	8.8e-01	0.03		21/21	20	8.8e-01	0.33	
hager2	2/2	1	4.3e-01	0.88		17/17	16	4.3e-01	0.52	
hager3	2/2	1	1.4e-01	0.05		17/17	16	1.4e-01	0.60	
hs006	6/6	6	0.0e+00	0.00		854/236	608	0.0e+00	0.01	
hs007	9/9	8	-1.7e+00	0.00		44/43	107	-1.7e+00	0.00	
hs009	13/13	23	-5.0e+00	0.00		6/6	5	-5.0e+00	0.00	
hs026	28/28	27	1.4e-16	0.00		87/81	198	1.8e-17	0.00	
hs027	11/11	13	4.0e-02	0.00		57/38	69	4.0e-02	0.00	
hs028	2/2	1	9.9e-31	0.00		2/2	1	2.2e-30	0.00	
hs039	10/10	13	-1.0e+00	0.00		17/17	20	-1.0e+00	0.00	
hs040	5/5	4	-2.5e+00	0.00		6/6	5	-2.5e+00	0.00	
hs046	23/23	22	1.4e-15	0.00		28/28	39	1.4e-15	0.00	
hs047	32/28	42	-2.7e+00	0.00		30/28	37	4.3e-14	0.00	
hs048	2/2	1	1.1e-29	0.00		2/2	1	7.9e-31	0.00	
hs049	21/21	20	2.1e-12	0.00		21/21	20	2.1e-12	0.00	
hs050	10/10	9	0.0e+00	0.00		10/10	9	1.2e-32	0.00	
hs051	2/2	1	5.9e-31	0.00		2/2	1	3.9e-31	0.00	
hs052	2/2	1	5.3e+00	0.00		15/14	14	5.3e+00	0.00	
hs061	23/23	23	-1.4e+00	0.00		30/21	36	-1.4e+00	0.00	
hs077	12/12	16	2.4e-01	0.00		18/18	28	2.4e-01	0.00	
hs078	6/6	5	-2.9e+00	0.00		8/8	11	-2.9e+00	0.00	
hs079	17/16	15	7.9e-02	0.00		15/14	17	7.9e-02	0.00	
hs100lnp	14/13	21	6.8e+02	0.00		2275/599	738	6.8e+02	0.03	
lukvle01	10/10	9	6.2e+00	0.06		13/13	18	6.2e+00	0.09	
lukvle02	10/10	9	2.8e+04	0.09		33/22	31	2.8e+04	0.21	
lukvle03	11/11	10	1.4e+01	0.02		54/51	117	1.4e+01	0.17	
lukvle04	13/13	12	3.5e+03	0.07		57/41	68	3.5e+03	0.26	

# Annexe B. Résultats numériques de SPDOPT

Problème	Problèmes standards					Problèmes dégénérés				
	#f/#g	#fact	f	CPU	e	#f/#g	#fact	f	CPU	e
lukvle05	32/30	48	4.1e+00	0.24		533/143	304	4.1e+00	1.61	
lukvle06	16/16	15	6.3e+04	0.13		233/84	108	6.3e+04	0.96	
lukvle07	10/10	16	-1.1e+00	0.02		26/23	41	-1.1e+00	0.04	
lukvle08	13/12	21	-9.8e+00	0.08		17/16	26	-9.8e+00	0.10	
lukvle09	31/30	54	1.0e+02	0.04		3/2	4	5.1e+02	0.00	7
lukvle10	5/4	7	2.2e+03	0.03	6	3/3	2	1.0e+03	0.01	7
lukvle11	12/12	11	4.9e-32	0.04		3727/3002	3248	4.8e+02	8.23	1
lukvle12	10/10	9	1.5e+03	0.06		24/22	38	1.5e+03	0.19	
lukvle13	30/29	45	3.1e+03	0.20		73/64	136	3.1e+03	0.56	
lukvle14	25/25	29	5.2e+03	0.09		32636/3002	3037	7.4e+03	12.70	1
lukvle15	53/50	102	8.6e-32	0.37		4002/1430	3359	1.0e-18	8.95	
lukvle16	9/9	8	3.5e+01	0.03		17/14	15	3.5e+01	0.05	
lukvle17	15/15	29	1.0e+03	0.06		36/32	53	1.0e+03	0.12	
lukvle18	13/13	16	1.0e+03	0.05		21/20	34	1.0e+03	0.07	
maratos	5/5	4	-1.0e+00	0.00		8/8	7	-1.0e+00	0.00	
mwright	18/17	24	2.5e+01	0.00		20/20	31	1.3e+00	0.00	
orthrdm2	15/15	31	1.6e+02	0.45		29/29	46	1.7e+02	0.71	
orthrega	198/122	281	1.4e+03	1.26		291/183	424	1.4e+03	1.25	
orthregb	14/14	29	3.1e-17	0.01		57/55	132	4.9e-21	0.02	
orthregc	26/25	52	1.9e+02	11.55		18/18	32	1.9e+02	3.85	
orthregd	17/17	31	1.5e+03	1.22		43/41	88	1.5e+03	3.91	
orthrgdm	18/17	31	1.5e+03	1.24		38/36	84	1.5e+03	4.81	
orthrgds	27/26	44	1.5e+03	1.88		1236/338	707	1.5e+03	31.59	
robot	14/14	31	6.6e+00	0.00		27/27	64	6.6e+00	0.00	
s216	9/9	8	1.0e+00	0.00		16/15	16	1.0e+00	0.00	
s219	12/12	15	-1.0e+00	0.00		228/68	121	-1.0e+00	0.00	
s235	27/16	15	4.0e-02	0.00		13/12	32	4.0e-02	0.00	
s269	2/2	1	4.1e+00	0.00		15/14	13	4.1e+00	0.00	
s316	9/9	8	3.3e+02	0.00		13/12	13	3.3e+02	0.00	
s317	9/9	8	3.7e+02	0.00		17/16	17	3.7e+02	0.00	
s318	9/9	8	4.1e+02	0.00		17/16	17	4.1e+02	0.00	
s319	9/9	8	4.5e+02	0.00		22/20	25	4.5e+02	0.00	
s320	11/11	10	4.9e+02	0.00		22/21	26	4.9e+02	0.00	
s321	12/12	11	5.0e+02	0.00		27/24	34	5.0e+02	0.00	
s322	13/13	12	5.0e+02	0.00		13/13	12	5.0e+02	0.00	
s335	15/15	14	-4.5e+00	0.00		51/49	98	-4.5e+00	0.00	
s336	12/12	15	-3.4e+00	0.00		12/12	15	-3.4e+00	0.00	
s338	21/21	43	-7.2e+00	0.00		23/18	34	-7.2e+00	0.00	
s344	7/7	6	3.3e-02	0.00		38/38	98	3.3e-02	0.00	
s345	19/18	18	3.3e-02	0.00		55/52	131	3.3e-02	0.00	
s375	26/24	47	-1.5e+00	0.00		25/25	53	-1.5e+00	0.00	
s378	19/19	29	-4.8e+00	0.00		20/20	33	-4.8e+00	0.00	
s394	16/16	24	1.9e+00	0.00		91/71	166	1.9e+00	0.02	
s395	22/22	34	1.9e+00	0.00		77/73	217	1.9e+00	0.10	

TABLE B.5 – Résultats de SPDOPT-AL sur des problèmes de la collection Hock et Schittkowski

Problème	#f/ #g	f	CPU	e	Problème	#f/ #g	f	CPU	e
hs010	12/ 12	-1.0e+00	0.00		hs100	26/ 26	6.8e+02	0.00	
hs011	7/ 7	-8.5e+00	0.00		hs100mod	21/ 21	6.8e+02	0.00	
hs012	8/ 8	-3.0e+01	0.00		hs101	34/ 34	1.8e+03	0.00	
hs013	138663/ 2999	9.9e-01	0.63	5	hs102	40/ 40	9.1e+02	0.01	
hs014	7/ 7	1.4e+00	0.00		hs103	35/ 33	5.4e+02	0.01	
hs015	22/ 21	3.6e+02	0.00		hs104	9/ 9	4.0e+00	0.00	
hs016	15/ 13	2.3e+01	0.00		hs106	19/ 19	7.0e+03	0.00	
hs017	17/ 17	1.0e+00	0.00		hs107	23/ 23	5.1e+03	0.00	
hs018	12/ 12	5.0e+00	0.00		hs108	282/ 55	-8.7e-01	0.01	
hs019	55/ 44	-7.0e+03	0.00		hs109	23/ 23	5.3e+03	0.00	
hs020	18/ 16	4.0e+01	0.00		hs111	15/ 15	-4.8e+01	0.00	
hs021	7/ 7	-1.0e+02	0.00		hs112	11/ 11	-4.8e+01	0.00	
hs022	6/ 6	1.0e+00	0.00		hs113	11/ 11	2.4e+01	0.00	
hs023	10/ 10	2.0e+00	0.00		hs114	22/ 22	-1.8e+03	0.00	
hs024	9/ 9	-1.0e+00	0.00		hs116	7368/ 3001	5.0e+01	0.32	1
hs029	7/ 7	-2.3e+01	0.00		hs117	18/ 18	3.2e+01	0.00	
hs030	7/ 7	1.0e+00	0.00		hs118	13/ 13	6.6e+02	0.00	
hs031	7/ 7	6.0e+00	0.00		hs119	18/ 18	2.4e+02	0.00	
hs032	15/ 15	1.0e+00	0.00		hs21mod	14/ 14	-9.6e+01	0.00	
hs033	118/ 58	-4.6e+00	0.00		hs268	18/ 18	3.0e-09	0.00	
hs034	9/ 9	-8.3e-01	0.00		hs35mod	15/ 15	2.5e-01	0.00	
hs035	7/ 7	1.1e-01	0.00		hs44new	25/ 19	-1.5e+01	0.00	
hs036	21/ 17	-3.3e+03	0.00		hs99exp	97/ 97	-7.5e+08	0.02	7
hs037	16/ 15	-3.5e+03	0.00		s215	14/ 14	-9.9e-09	0.00	
hs041	7/ 7	1.9e+00	0.00		s217	9/ 9	-8.0e-01	0.00	
hs042	6/ 6	1.4e+01	0.00		s218	6/ 6	-9.9e-09	0.00	
hs043	10/ 9	-4.4e+01	0.00		s220	4/ 4	1.0e+00	0.00	
hs044	69/ 42	-1.5e+01	0.00		s221	291/ 185	-1.0e+00	0.00	
hs053	5/ 5	4.1e+00	0.00		s222	6/ 6	-1.5e+00	0.00	
hs054	7/ 7	1.9e-01	0.00		s223	8/ 8	-8.3e-01	0.00	
hs055	6/ 6	6.7e+00	0.00		s224	11/ 11	-3.0e+02	0.00	
hs056	10/ 10	-3.5e+00	0.00		s225	10/ 10	2.0e+00	0.00	
hs057	15/ 14	2.8e-02	0.00		s226	8/ 8	-5.0e-01	0.00	
hs059	49/ 47	-7.8e+00	0.00		s227	7/ 7	1.0e+00	0.00	
hs060	7/ 7	3.3e-02	0.00		s228	9/ 9	-3.0e+00	0.00	
hs062	15/ 15	-2.6e+04	0.00		s230	9/ 9	3.7e-01	0.00	
hs063	7/ 7	9.6e+02	0.00		s231	19/ 19	3.6e-20	0.00	
hs064	19/ 19	6.3e+03	0.00		s232	48/ 28	-1.0e+00	0.00	
hs065	41/ 27	9.5e-01	0.00		s233	8/ 8	2.9e-20	0.00	
hs066	7/ 7	5.2e-01	0.00		s234	17/ 17	-8.0e-01	0.00	
hs067	10/ 10	-1.2e+03	0.00		s236	21/ 19	-8.2e+00	0.00	
hs070	10/ 10	1.7e-01	0.00		s237	69/ 52	-5.9e+01	0.00	
hs071	7/ 7	1.7e+01	0.00		s238	60/ 59	-5.9e+01	0.00	
hs072	25/ 25	7.3e+02	0.00		s239	17/ 17	-8.2e+00	0.00	
hs073	8/ 8	3.0e+01	0.00		s247	10/ 10	3.0e-21	0.00	
hs074	10/ 10	5.1e+03	0.00		s248	14/ 14	-8.0e-01	0.00	
hs075	16/ 16	5.2e+03	0.00		s249	6/ 6	1.0e+00	0.00	
hs076	7/ 7	-4.7e+00	0.00		s250	21/ 17	-3.3e+03	0.00	
hs080	7/ 7	5.4e-02	0.00		s251	16/ 15	-3.5e+03	0.00	
hs081	7/ 7	5.4e-02	0.00		s252	19/ 19	4.0e-02	0.00	
hs083	27/ 21	-3.1e+04	0.00		s253	18/ 18	6.9e+01	0.00	
hs084	38/ 35	-5.3e+06	0.00		s262	8/ 8	-1.0e+01	0.00	
hs085	20/ 20	-1.9e+00	0.01		s263	395/ 395	-1.0e+00	0.01	
hs086	10/ 10	-3.2e+01	0.00		s264	9/ 9	-4.4e+01	0.00	
hs087	15/ 15	8.8e+03	0.00		s265	7/ 7	1.9e+00	0.00	
hs088	24/ 24	1.4e+00	0.00		s268	18/ 18	3.0e-09	0.00	
hs089	27/ 26	1.4e+00	0.01		s270	16/ 16	7.5e-11	0.00	
hs090	26/ 26	1.4e+00	0.01		s277	11/ 11	5.1e+00	0.00	
hs091	47/ 44	1.4e+00	0.02		s278	14/ 14	7.8e+00	0.00	
hs092	27/ 26	1.4e+00	0.02		s279	13/ 13	1.1e+01	0.00	
hs093	40/ 31	1.4e+02	0.00		s280	13/ 13	1.3e+01	0.00	
hs095	58/ 48	1.6e-02	0.00		s284	25/ 24	-1.8e+03	0.00	
hs096	58/ 48	1.6e-02	0.00		s285	60/ 29	-8.3e+03	0.00	
hs097	52/ 35	4.1e+00	0.00		s315	13/ 13	-8.0e-01	0.00	
hs098	24/ 20	4.1e+00	0.00		s323	6/ 6	3.8e+00	0.00	
hs099	170161/ 2901	-8.3e+08	0.98		s324	12/ 12	5.0e+00	0.00	

## Annexe B. Résultats numériques de SPDOPT

Problème	#f/ #g	f	CPU	e	Problème	#f/ #g	f	CPU	e
s325	9/ 9	3.8e+00	0.00		s365	41/ 34	5.2e+01	0.00	
s326	9/ 9	-8.0e+01	0.00		s366	40/ 40	1.2e+03	0.00	
s327	60/ 33	2.8e-02	0.00		s367	34/ 31	-3.7e+01	0.00	
s329	58/ 44	-7.0e+03	0.00		s369	20/ 20	7.0e+03	0.00	
s330	9/ 9	1.6e+00	0.00		s372	214/ 117	2.3e+04	0.01	
s331	6/ 6	4.3e+00	0.00		s374	5562/ 1432	2.3e-01	0.72	
s332	86621/ 3001	2.9e+01	1.32	1	s376	1506/ 522	-4.4e+03	0.06	
s337	7/ 7	6.0e+00	0.00		s377	17/ 17	-8.0e+02	0.00	
s339	7/ 7	3.4e+00	0.00		s380	37/ 37	3.2e+00	0.00	
s341	7/ 7	-2.3e+01	0.00		s381	13/ 13	1.0e+00	0.00	
s342	11/ 11	-2.3e+01	0.00		s382	11/ 11	1.0e+00	0.00	
s343	25/ 25	-5.7e+00	0.00		s383	87/ 67	7.3e+05	0.00	
s346	25/ 25	-5.7e+00	0.00		s384	40/ 20	-8.3e+03	0.00	
s353	8/ 8	-4.0e+01	0.00		s385	37/ 37	-8.3e+03	0.00	
s354	11/ 11	1.1e-01	0.00		s387	22/ 22	-8.2e+03	0.00	
s355	376/ 153	7.0e+01	0.01		s388	32/ 32	-5.8e+03	0.01	
s357	9/ 9	3.6e-01	0.01		s389	216/ 126	-5.8e+03	0.03	
s359	52/ 52	-5.5e+06	0.00		s392	54/ 54	-1.1e+06	0.01	
s360	3151/ 3001	-2.6e+06	0.13	1	s393	38/ 38	8.6e-01	0.02	
s361	22/ 22	-1.5e+04	0.00						

TABLE B.6 – Résultats de SPDOPT-AL sur des problèmes de la collection CUTEst

Problème	#f/#g	f	CPU	e	Problème	#f/#g	f	CPU	e
A0ENDNDL	10/10	-2.7e-04	0.69		AUG3DCQP	23/23	6.2e+04	8.95	
A0ENINDL	10/10	-2.7e-04	0.69		AUG3DQP	23/23	5.4e+04	8.55	
A0ENSNDL	12/12	-2.7e-04	2.30		AVGASA	10/10	-4.6e+00	0.00	
A0ESDNDL	10/10	-2.7e-04	0.68		AVGASB	11/11	-4.5e+00	0.00	
A0ESINDL	10/10	-2.7e-04	0.69		AVION2	3042/3001	9.5e+07	1.12	1
A0ESSNDL	12/12	-2.7e-04	2.40		BATCH	364/363	2.1e+05	0.12	4
A0NNDNDL	22/22	-2.7e-04	2.42		BDRY2	-/-	-	-	2
A0NNDNIL	376/314	-2.6e-04	78.74		BIGBANK	22/22	-4.2e+06	0.19	
A0NNDNSL	22/22	-2.5e-04	3.82		BIGGSC4	23/23	-2.5e+01	0.00	
A0NNSNSL	36/26	-2.3e-04	27.55		BLOCKQP1	547/488	-5.0e+03	66.21	
A0NSDSDL	17/17	-2.7e-04	2.30		BLOCKQP2	74/22	-5.0e+03	2.65	
A0NSDSDS	267/75	-1.6e-05	2.71		BLOCKQP3	3001/3001	-2.5e+02	1663.15	1
A0NSDSIL	341/335	-2.6e-04	95.89		BLOCKQP4	3001/3001	-6.4e+02	1819.61	1
A0NSDSSL	22/22	-2.5e-04	4.21		BLOCKQP5	3001/3001	-2.5e+02	1531.01	1
A0NSSSSL	160332/3001	-6.5e+06	2881.36	1	BLOWEYA	9/9	-2.3e-02	0.22	
A2ENDNDL	18/18	-2.1e-04	2.02		BLOWEYB	8/8	-1.5e-02	0.20	
A2ENINDL	18/18	-2.1e-04	1.87		BLOWEYC	9/9	-1.5e-02	0.21	
A2ENSNDL	19/19	-2.2e-04	10.00		BRAINPC0	15525/3001	3.9e-01	669.26	1
A2ESDNDL	18/18	-2.1e-04	2.07		BRAINPC1	13266/3001	4.2e-04	730.14	1
A2ESINDL	18/18	-2.1e-04	1.94		BRAINPC2	18381/3001	4.4e-01	2778.01	1
A2ESSNDL	19/19	-2.2e-04	7.01		BRAINPC3	505/182	1.7e-04	47.08	
A2NNDNDL	25/25	-2.2e-04	4.10		BRAINPC4	12681/3001	1.8e-03	768.38	1
A2NNDNIL	88588/3001	9.6e-01	1382.73	5	BRAINPC5	21774/3001	3.3e-01	700.21	1
A2NNDNSL	18410/2588	-2.5e-04	942.55		BRAINPC6	13991/3001	3.8e-01	810.75	1
A2NNSNSL	12379/2331	-2.9e-04	2472.78		BRAINPC7	20041/3001	3.6e-01	819.41	1
A2NSDSDL	24/24	-2.1e-04	2.93		BRAINPC8	10308/3001	7.7e-04	865.75	1
A2NSDSIL	12985/3001	2.5e+00	602.29		BRAINPC9	1212/384	8.2e-04	97.58	
A2NSDSSL	46/28	-2.2e-04	5.24		BRIDGEND	146/140	5.4e+01	4.54	
A2NSSSSL	1685/338	-5.5e-04	1482.61		BRITGAS	18/18	-1.5e-07	0.09	
A4X12	189/21	-7.4e+01	0.39	7	BT13	26/26	-9.9e-09	0.00	
A5ENDNDL	18/18	-1.2e-04	1.21		BTS4	130/130	6.9e+07	3632.82	5
A5ENINDL	18/18	-1.2e-04	1.27		BURKEHAN	168232/3001	2.3e-09	0.23	1
A5ENSNDL	237/41	-1.3e-04	23.22		CAMSHAPE	8219/3001	-5.0e+00	47.22	1
A5ESDNDL	18/18	-1.2e-04	1.23		CANTILVR	12/12	1.3e+00	0.00	
A5ESINDL	18/18	-1.2e-04	1.19		CAR2	157694/3001	2.7e+00	3279.09	1
A5ESSNDL	237/41	-1.3e-04	13.64		CATMIX	18462/2999	1.2e+00	104.87	1
A5NNDNDL	1435/225	-1.4e-04	46.64		CB2	9/9	2.0e+00	0.00	
A5NNDNIL	95370/3001	4.2e-01	1008.53	5	CB3	9/9	2.0e+00	0.00	
A5NNDNSL	20103/3001	-1.5e-04	799.52		CBS	33/33	5.4e+06	1.42	
A5NNSNSL	17318/3001	-3.3e-04	2719.50		CHACONN1	6/6	2.0e+00	0.00	
A5NSDSDL	24/24	-1.2e-04	2.66		CHACONN2	8/8	2.0e+00	0.00	
A5NSDSDM	267/75	-1.6e-05	2.37		CHANDHEQ	15/15	0.0e+00	0.17	
A5NSDSIL	80081/3001	1.8e+00	890.71	5	CHEMRCTA	11301/2776	0.0e+00	95.74	
A5NSDSSL	16264/3001	-3.3e-04	824.92		CHEMRCTB	386/174	0.0e+00	4.01	
A5NSSNSM	267/75	-1.6e-05	2.35		CLNLBEAM	4789/3000	2.4e+02	157.01	1
A5NSSSSL	1676/325	-2.1e-04	960.96		CONCON	7/7	-6.2e+03	0.00	
ACOPP118	47/47	1.3e+05	0.42		CONGIGMZ	535/535	2.8e+01	0.03	
ACOPP14	31/31	8.1e+03	0.03		CONT5-QP	78/78	6.4e-03	26.49	
ACOPP300	2288/1988	7.2e+05	44.31		CORE1	133/133	9.1e+01	0.04	
ACOPP30	23/22	5.8e+02	0.05		CORE2	3689/3001	9.4e+01	3.76	1
ACOPP57	65/65	4.2e+04	0.22		CORKSCRW	91091/3001	8.6e+01	193.75	1
ACOPR118	2/2	1.5e+05	0.01	7	COSHFUN	23130/3001	-3.3e+04	150.69	1
ACOPR14	2/2	9.4e+03	0.00	7	C-RELOAD	9163/1322	-1.0e+00	26.54	
ACOPR300	2/2	7.1e+05	0.02	7	CRESC100	3892/3001	4.7e+00	9.37	1
ACOPR30	22/22	5.8e+02	0.05		CRESC132	13428/3001	1.4e+01	147.33	1
ACOPR57	1789/390	4.2e+04	1.29		CRESC4	322/189	8.7e-01	0.02	
AGG	110860/3001	-3.6e+07	26.90		CRESC50	5500/3001	9.7e-07	3.31	1
AIRPORT	18/18	4.8e+04	0.02		CSFI1	24/24	-4.9e+01	0.00	
ALJAZZAF	41/38	3.7e+04	0.10		CSFI2	25/25	5.5e+01	0.00	
ALLINITA	161045/3001	3.3e+01	0.67	1	CVXQP1	13/13	3.6e+03	0.00	
ALLINITC	125467/3001	3.0e+01	0.38	5	CVXQP2	14/14	1.9e+03	0.00	
ALLINQP	143322/3001	-6.8e+03	2673.83	1	CVXQP3	14/14	4.3e+03	0.00	
ALSOTAME	8/8	8.2e-02	0.00		DALE	16/16	1.8e+04	1.02	
ANTWERP	140153/3001	3.2e+03	2.68	1	DALLASL	45/45	-2.0e+05	0.26	
AUG2DCQP	34/34	6.5e+06	2.60		DALLASM	23/23	-4.8e+04	0.02	
AUG2DQP	35/35	6.2e+06	2.62		DALLASS	24/24	-3.2e+04	0.00	

## Annexe B. Résultats numériques de SPDOPT

Problème	#f/#g	f	CPU	e	Problème	#f/#g	f	CPU	e
DECONVC	71/68	3.7e−10	0.12		HANGING	151482/3001	−3.1e+04	336.38	1
DEGENLPA	8689/3001	3.1e+00	0.43		HATFLDH	18/18	−2.5e+01	0.00	
DEGENLPB	148829/3001	−3.1e+01	1.60		HELSEBY	289/108	3.2e+01	1.36	
DEGENQPC	13/13	1.5e−05	0.97		HET-Z	27/20	1.0e+00	0.08	
DEGENQP	10/10	1.4e−05	7.22		HIE1372D	491/103	8.1e+05	1.96	
DEGTRIDL	15/15	5.0e−01	4.46		HIMMELBI	34/34	−1.7e+03	0.01	
DEMBO7	349/93	1.7e+02	0.02		HIMMELBJ	15/14	−1.9e+03	0.01	6
DEMYMALO	17/16	−3.0e+00	0.00		HIMMELBK	18/18	5.2e−02	0.00	
DIPIGRI	26/26	6.8e+02	0.00		HIMMELP2	38/24	−8.2e+00	0.00	
DISC2	49/49	1.6e+00	0.01		HIMMELP3	11/11	−5.9e+01	0.00	
DISCS	41277/3001	1.2e+01	7.74	1	HIMMELP4	109/61	−5.9e+01	0.00	
DITPERT	95/63	−2.0e+00	37.14		HIMMELP5	1916/513	−5.9e+01	0.02	
DIXCHLNV	5/5	8.1e+14	11.93	4	HIMMELP6	29/28	−5.9e+01	0.00	
DNIEPER	86/86	1.9e+04	0.02		HONG	12/12	2.3e+01	0.00	
DRUGDISE	6404/3001	1.6e+01	21.02	1	HUBFIT	8/8	1.7e−02	0.00	
DRUGDIS	33/33	4.3e+00	2.78		HUES-MOD	58/58	3.5e+07	0.73	
DUAL1	15/15	3.5e−02	0.03		HUESTIS	129337/3001	1.3e+11	152.00	1
DUAL2	12/12	3.4e−02	0.05		HVYCRASH	41/41	1.1e−19	0.97	
DUAL3	12/12	1.4e−01	0.04		HYDROELL	65746/3001	−3.4e+06	72.12	1
DUAL4	12/12	7.5e−01	0.03		HYDROELM	74383/3001	−3.4e+06	38.44	1
DUALC1	56/56	6.2e+03	0.09		HYDROELS	65850/3001	−3.4e+06	11.98	1
DUALC2	37/37	3.6e+03	0.05		JANNSON3	14/14	2.0e+04	1.27	
DUALC5	11/11	4.3e+02	0.02		JANNSON4	14/14	9.8e+03	0.46	
DUALC8	22/22	1.8e+04	0.06		JJTABEL3	3001/3001	5.6e+13	454.58	1
EG3	12500/3001	7.0e−02	1618.77	1	KISSING2	52781/3001	6.5e+01	44.51	1
EIGENA	1060/144	0.0e+00	2705.58		KISSING	18951/3001	8.5e−01	65.66	1
EIGMAXA	12/12	−1.0e+00	0.00		KIWCRESC	10/10	−9.8e−09	0.00	
EIGMAXB	9/9	−9.7e−04	0.01		KSIP	3384/509	5.8e−01	10.14	
EIGMINA	179/41	1.0e+00	0.02		LAKES	361/359	3.5e+05	0.28	
EIGMINB	483/111	8.7e−03	0.10		LAUNCH	19/19	9.0e+00	0.00	
ELATTAR	16504/3001	6.3e+01	4.62	1	LEAKNET	30/30	8.0e+00	0.03	
EQC	112665/3001	−8.6e+02	1.25	1	LEUVEN1	77011/3001	−9.2e+06	210.38	1
ERRINBAR	496/277	2.8e+01	0.05		LEUVEN2	49290/3001	−6.1e+04	346.34	1
EXPFITA	15/15	1.1e−03	0.00		LEUVEN3	−/−	−	−	2
EXPFITB	19/19	5.0e−03	0.01		LEUVEN4	−/−	−	−	2
EXPFITC	171/154	2.3e−02	0.59		LEUVEN5	−/−	−	−	2
EXTRASIM	5/5	1.0e+00	0.00		LEUVEN6	−/−	−	−	2
FCCU	8/8	1.1e+01	0.00		LEUVEN7	25/25	6.9e+02	0.81	
FEEDLOC	142838/3001	4.2e−01	22.04	1	LIN	8/8	−1.8e−02	0.00	
FLETCHER	23/23	1.2e+01	0.00		LINSPANH	10/10	−7.7e+01	0.00	
GASOIL	5728/1821	5.2e−03	299.94		LIPPET1	−/−	−	−	2
GAUSSELM	62167/3001	−1.0e−01	80.14	1	LIPPET2	−/−	−	−	2
GIGOMEZ1	21/19	−3.0e+00	0.00		LISWET10	20530/2941	9.8e+00	42.17	
GIGOMEZ2	8/8	2.0e+00	0.00		LISWET11	9086/1586	9.9e+00	21.01	
GIGOMEZ3	8/8	2.0e+00	0.00		LISWET12	14208/3001	1.7e+02	38.51	1
GILBERT	22/22	2.5e+03	0.51		LISWET1	164/86	7.1e+00	0.96	
GLIDER	12465/3001	−1.0e+03	250.44	1	LISWET2	272/47	5.0e+00	0.68	
GMNCASE1	11/11	2.7e−01	0.40		LISWET3	298/66	5.0e+00	0.80	
GMNCASE2	11/11	−9.9e−01	0.47		LISWET4	276/66	5.0e+00	0.76	
GMNCASE3	11/11	1.5e+00	0.47		LISWET5	82/29	5.0e+00	0.31	
GMNCASE4	25/25	5.9e+03	0.87		LISWET6	250/58	5.0e+00	0.65	
GOFFIN	7/7	−5.0e−09	0.02		LISWET7	172/76	9.9e+01	0.81	
GOULDQP1	27/27	−3.5e+03	0.00		LISWET8	16974/3001	6.0e+01	40.87	5
GOULDQP2	3/3	1.6e−12	0.23		LISWET9	14804/3001	2.3e+02	39.08	1
GOULDQP3	6/6	2.4e−05	0.63		LOADBAL	14/14	4.5e−01	0.00	
GPP	51/51	2.3e+05	252.23		LOOTSMA	26/21	1.4e+00	0.00	
GRIDNETA	24/24	4.8e+02	0.43		LOTSCHD	10/10	2.4e+03	0.00	
GRIDNETC	25/25	1.6e+02	0.88		LSNNOLOC	15/15	1.2e+02	0.00	
GRIDNETD	25/25	5.7e+02	0.81		LSQFIT	8/8	3.4e−02	0.00	
GRIDNETF	24/24	2.4e+02	1.65		LUKVLI10	21/21	3.5e+03	3.41	
GRIDNETG	23/23	6.2e+02	0.74		LUKVLI11	74/60	2.2e−07	5.00	
GRIDNETI	24/24	2.4e+02	1.66		LUKVLI12	120/89	8.3e−09	8.14	
HADAMARD	5605/3001	1.1e+00	595.14	1	LUKVLI13	38/38	1.3e+02	3.72	
HAGER4	12/12	2.8e+00	0.25		LUKVLI14	16711/3001	1.7e+04	197.27	1
HAIFAL	51/51	−1.3e+01	11.02		LUKVLI15	530/491	4.7e+01	56.03	
HAIFAM	156/128	−4.5e+01	0.37		LUKVLI16	65/59	3.0e+03	5.18	
HAIFAS	21/21	−4.5e−01	0.00		LUKVLI17	114/102	7.8e+02	8.94	
HALDMADS	57/51	2.5e+00	0.02		LUKVLI18	27/27	2.3e−07	1.78	

# Annexe B. Résultats numériques de SPDOPT

Problème	#f/#g	f	CPU	e	Problème	#f/#g	f	CPU	e
LUKVL11	3998/3001	8.9e+03	322.48	1	OET7	20750/3001	3.0e-04	48.85	1
LUKVL13	22/22	1.2e+01	0.68		OPTCDEG2	75/56	2.3e+02	0.95	
LUKVL14	174/162	-3.5e+05	16.94		OPTCDEG3	86/46	4.6e+01	0.80	
LUKVL15	89265/3001	3.4e+00	1124.88	1	OPTCNTRL	15/15	5.5e+02	0.00	
LUKVL16	23/23	6.3e+05	2.65		OPTMASS	143724/2999	-1.3e-02	179.86	1
LUKVL17	15/15	-2.2e+03	0.39		OPTPRLOC	21/20	-1.6e+01	0.00	
LUKVL18	3001/3001	1.3e+06	697.48	1	ORBIT2	106957/3001	1.0e+02	993.69	1
LUKVL19	150/73	1.0e+03	1.48		ORTHREG	87/64	1.1e+03	5.53	
MADSEN	18/18	6.2e-01	0.00		ORTHREGF	34/34	6.4e+01	1.36	
MADSSCHJ	95/89	-5.0e+03	13.01		OSORIO	94/24	1.1e+01	1.20	
MAKELA1	20/17	-1.4e+00	0.00		PDE1	73/28	1.5e-02	725.76	
MAKELA2	7/7	7.2e+00	0.00		PDE2	21/21	1.1e+03	1115.08	
MAKELA3	9/9	-9.2e-09	0.00		PENTAGON	19/19	1.4e-04	0.00	
MAKELA4	5/5	2.0e-08	0.00		PFIT1	12701/3001	0.0e+00	0.33	1
MANNE	48080/3001	9.9e+00	359.00	1	PFIT2	1090/430	0.0e+00	0.01	7
MARINE	86/86	2.0e+07	16.23		PFIT3	3328/3001	0.0e+00	0.12	1
MATRIX2	61/25	2.0e-10	0.00		PFIT4	1144/459	0.0e+00	0.02	7
MCONCON	7/7	-6.2e+03	0.00		PINENE	171/164	2.0e+01	15.68	
METHANOL	1965/1195	9.0e-03	278.49		POLAK1	7/7	2.7e+00	0.00	
MIFFLIN1	6/6	-1.0e+00	0.00		POLAK2	2/2	1.0e-01	0.00	7
MIFFLIN2	41/21	-1.0e+00	0.00		POLAK3	54/45	5.9e+00	0.01	
MINC44	15/14	3.8e-04	8.28		POLAK4	6/6	-9.7e-09	0.00	
MINMAXBD	42/42	1.2e+02	0.00		POLAK5	34/34	5.0e+01	0.00	
MINMAXRB	6/6	-9.5e-09	0.00		POLAK6	34007/3001	-2.0e+01	0.28	1
MINPERM	5/5	3.6e-04	4.54		POLYGON	99710/3001	-8.2e-03	334.74	1
MISTAKE	17/17	-1.0e+00	0.00		PORTFL1	10/10	2.0e-02	0.00	
MOSARQP1	18/18	-3.8e+03	0.16		PORTFL2	9/9	3.0e-02	0.00	
MOSARQP2	15/15	-5.1e+03	0.14		PORTFL3	11/11	3.3e-02	0.00	
MPC10	26330/3001	-1.9e+05	318.12	1	PORTFL4	9/9	2.6e-02	0.00	
MPC11	26331/3001	-1.9e+05	311.35	1	PORTFL6	9/9	2.6e-02	0.00	
MPC12	26331/3001	-1.9e+05	293.73	1	PORTSNQP	13/13	3.3e+04	3.94	
MPC13	26348/3001	-1.9e+05	294.18	1	PORTSQP	15/15	3.3e+04	3.44	
MPC14	26369/3001	-1.9e+05	288.52	1	POWELL20	3005/3001	5.4e+09	82.20	1
MPC15	26330/3001	-1.9e+05	288.13	1	PRIMAL1	14/14	-3.5e-02	0.06	
MPC16	26331/3001	-1.9e+05	282.77	1	PRIMAL2	12/12	-3.4e-02	0.06	
MPC1	42527/3001	-2.6e+05	438.42	1	PRIMAL3	14/14	-1.4e-01	0.21	
MPC2	34529/3001	4.9e+07	223.59	1	PRIMAL4	18/18	-7.5e-01	0.17	
MPC3	84009/3001	4.8e+07	240.34	1	PRIMALC1	41/41	-6.2e+03	0.05	
MPC4	18071/3001	-7.9e+05	283.91	1	PRIMALC2	60/60	-3.6e+03	0.04	
MPC5	52413/3001	5.1e+07	240.94	1	PRIMALC5	26/26	-4.3e+02	0.03	
MPC6	84704/3001	4.5e+07	231.65	1	PRIMALC8	47/47	-1.8e+04	0.13	
MPC7	17844/3001	3.6e+07	238.85	1	PRODPL0	20/20	5.9e+01	0.00	
MPC8	21204/3001	4.6e+07	253.26	1	PRODPL1	23/23	3.6e+01	0.01	
MPC9	26332/3001	-1.9e+05	290.89	1	PT	25/18	1.8e-01	0.03	
MRIBASIS	74742/3001	2.2e+01	3.93	1	QC	160239/3001	-8.9e+02	1.58	1
NASH	169993/3001	0.0e+00	5.09	1	QPBAND	22/22	-5.0e+04	4.63	
NCVXQP1	51/51	-3.4e+03	0.00		QPCBLEND	38/22	-7.8e-03	0.01	
NCVXQP2	50/43	-2.7e+03	0.00		QPCBOEI1	121801/3001	1.2e+07	38.18	
NCVXQP3	62/50	-2.5e+03	0.00		QPCBOEI2	3089/3001	8.2e+06	7.02	1
NCVXQP4	91/78	-5.6e+03	0.00		QPCSTAIR	130759/3001	4.0e+05	33.80	1
NCVXQP5	234/166	-3.6e+03	0.01		QPNBAND	24/24	-2.5e+05	7.65	
NCVXQP6	172/126	-3.0e+03	0.01		QPNBLEND	71/25	-9.1e-03	0.02	
NCVXQP7	76/72	-3.0e+03	0.00		QPNBOEI1	3001/3001	1.3e+06	23.90	1
NCVXQP8	80/70	-2.4e+03	0.00		QPNBOEI2	102095/3001	1.4e+06	13.86	1
NCVXQP9	46/44	-2.3e+03	0.00		QPNSTAIR	123043/3001	2.7e+05	35.73	1
NET1	81712/3001	3.7e+04	3.52	1	QR3D	9/9	0.0e+00	2.26	
NET2	122896/3001	1.2e+05	11.53	1	RDW2D52F	11/11	8.6e-03	0.01	
NET3	128632/3001	2.2e+05	54.21	1	READING1	23/23	-1.6e-01	0.53	
NET4	-/-	-	-	2	READING2	366/65	-1.3e-02	2.84	
NGONE	158097/3001	-4.6e-02	365.72	1	READING3	22/22	-1.5e-01	0.49	
NUFFIELD	107295/2999	-4.4e-01	29.17	1	READING4	134777/3001	-2.9e-01	669.37	1
ODFITS	9/9	-2.4e+03	0.00		READING5	266/147	-5.0e-18	5.33	
OET1	210/112	5.4e-01	0.45		READING6	19/19	-1.4e+02	0.02	
OET2	189/97	8.7e-02	0.49		READING7	3001/3001	-3.0e+16	992.78	1
OET3	148/35	4.5e-03	0.19		READING8	496/493	-2.0e+03	2027.12	
OET4	138/75	4.3e-03	0.37		READING9	10753/2999	-9.4e+01	257.50	1
OET5	112/112	2.7e-03	0.62		RES	42/15	0.0e+00	0.00	
OET6	12943/2229	2.1e-03	17.80		RK23	8/8	8.3e-02	0.00	

# Annexe B. Résultats numériques de SPDOPT

Problème	#f/#g	f	CPU	e	Problème	#f/#g	f	CPU	e
ROBOTARM	3894/3001	2.1e-02	170.50	1	TABLE5	-/-	-	-	2
ROBOT	69/68	5.5e+00	0.00		TABLE6	3001/3001	2.8e+12	185.47	1
ROCKET	10759/3001	-8.0e+04	132.15	1	TABLE7	3001/3001	7.8e+08	39.27	1
ROSENMMX	38/35	-4.4e+01	0.00		TABLE8	11/11	1.9e+02	0.03	
ROTDISC	600/67	9.3e+00	2.74	7	TAME	5/5	0.0e+00	0.00	
S268	18/18	3.0e-09	0.00		TARGUS	3001/3001	1.7e+07	9.29	1
S277-280	11/11	5.1e+00	0.00		TENBARS1	40/37	2.3e+03	0.00	
SAROMM	114047/3001	6.6e+00	697.64	1	TENBARS2	148/102	2.3e+03	0.02	
SARO	7744/3001	2.5e+02	230.03	1	TENBARS3	39/38	2.2e+03	0.00	
SAWPATH	137228/3001	4.6e+01	38.40	1	TENBARS4	74/54	3.7e+02	0.01	
SEMICON1	2/2	0.0e+00	0.06	7	TFI1	24/24	5.3e+00	0.01	
SEMICON2	1828/1327	0.0e+00	61.34		TFI2	23/16	6.5e-01	0.00	
SIMPLLPA	9/9	1.0e+00	0.00		TFI3	75/33	4.3e+00	0.01	
SIMPLLPB	8/8	1.1e+00	0.00		TOYSARAH	3001/3001	1.6e+19	1464.89	1
SINROSNB	120/119	0.0e+00	1.45		TRAINF	31/31	3.1e+00	0.44	
SIPOW1M	43/28	-1.0e+00	0.24		TRAINH	195/192	1.2e+01	4.05	
SIPOW1	67/33	-1.0e+00	0.25		TRIMLOSS	52/52	9.1e+00	0.06	
SIPOW2M	53/32	-1.0e+00	0.20		TRO11X3	41206/3001	-8.6e+00	16.63	1
SIPOW2	73/35	-1.0e+00	0.26		TRO21X5	4043/3001	1.6e+00	37.98	1
SIPOW3	61/34	5.3e-01	0.30		TRO3X3	63963/2999	-5.4e+13	2.89	1
SIPOW4	110/42	2.7e-01	0.41		TRO41X9	4697/3001	-1.3e-04	217.38	1
SMBANK	15/15	-7.1e+06	0.00		TRO4X4	49415/3001	-3.8e+06	6.55	1
SMMPSF	734/733	1.0e+06	7.18		TRO5X5	62614/3001	7.6e+00	8.41	1
SNAKE	34943/3001	-1.8e+05	0.12	1	TRO6X2	51313/3001	-5.9e+05	5.56	1
SOSQP1	8/8	2.2e-07	220.08		TRUSPYR1	11/11	1.1e+01	0.00	
SOSQP2	17/17	-1.2e+03	0.63		TRUSPYR2	11/11	1.1e+01	0.00	
SPIRAL	2308/1122	-9.6e-09	0.03		TRY-B	44/34	2.5e-21	0.00	
SREADIN3	23/23	-1.5e-01	0.52		TWIRIBG1	-/-	-	-	2
SSEBLIN	211/211	1.6e+07	0.11		TWIRIMD1	233/123	-1.0e+00	81.46	
SSEBNLN	1659/928	1.6e+07	1.14		TWIRISM1	10407/1525	-1.0e+00	79.57	
SSNLBEAM	6986/3000	2.4e+02	69.14	1	TWOBARS	7/7	1.5e+00	0.00	
STANCMIN	9/9	4.2e+00	0.00		TWOD	-/-	-	-	2
STCQP1	19/19	3.7e+05	21.23		UBH1	5/5	1.1e+00	0.19	
STCQP2	16/16	3.7e+04	8.68		UBH5	5/5	1.1e+00	0.13	
STEENBRA	26/26	1.7e+04	0.11		VANDERM1	282/242	0.0e+00	29.61	
STEENBRB	307/220	9.1e+03	2.41		VANDERM2	282/242	0.0e+00	29.44	
STEENBRC	248/208	2.8e+04	3.51		VANDERM3	3020/2025	0.0e+00	228.34	
STEENBRD	652/385	9.0e+03	4.63		WACHBIEG	18/18	1.0e+00	0.00	
STEENBRE	93711/3001	2.9e+04	76.88	5	WATER	30/30	1.1e+04	0.00	
STEENBRF	323/201	9.0e+03	2.42		WOMFLET	15/15	6.0e+00	0.00	
STEENBRG	923/664	2.7e+04	9.69		YAO	163818/3001	6.9e+00	128.78	1
STEERING	17/17	5.5e-01	0.24		YORKNET	131648/3001	9.8e+03	20.23	1
STNQP1	718/718	-3.1e+05	446.07		ZAMB2-10	26/26	-1.6e+00	0.03	
STNQP2	933/933	-5.7e+05	599.20		ZAMB2-11	21/21	-1.1e+00	0.02	
SUPERSIM	6/6	6.7e-01	0.00		ZAMB2-8	17/17	-1.5e-01	0.00	
SVANBERG	89/86	8.4e+03	15.31		ZAMB2-9	21/21	-3.5e-01	0.01	
SWOPF	14/14	6.8e-02	0.01		ZAMB2	37/37	-1.1e+01	0.58	
SYNTHES1	9/9	7.6e-01	0.00		ZECEVIC2	8/8	-4.1e+00	0.00	
SYNTHES2	16/16	-5.5e-01	0.00		ZECEVIC3	17/17	9.7e+01	0.00	
SYNTHES3	13/13	1.5e+01	0.00		ZECEVIC4	12/12	7.6e+00	0.00	
TABLE1	3001/3001	2.8e+12	199.83	1	ZIGZAG	75671/3001	9.9e+01	117.25	1
TABLE3	-/-	-	-	2	ZY2	9/9	2.0e+00	0.00	
TABLE4	-/-	-	-	2					



TABLE B.7 – Résultats de SPDOPT-AL sur des problèmes dégénérés des collections COPS et CUTer

Problème	#f/ #g	f	CPU	e	Problème	#f/ #g	f	CPU	e
aug3d	6/ 6	5.5e+02	0.75		hs052	6/ 6	5.3e+00	0.00	
aug3dc	5/ 5	7.7e+02	0.08		hs061	23/ 20	-1.4e+02	0.00	
bt01	16/ 15	-1.0e+00	0.00		hs077	14/ 14	2.4e-01	0.00	
bt02	15/ 15	3.3e-02	0.00		hs078	8/ 8	-2.9e+00	0.00	
bt03	7/ 7	4.1e+00	0.00		hs079	6/ 6	7.9e-02	0.00	
bt04	8/ 8	-4.6e+01	0.00		hs100lnp	15/ 14	6.8e+02	0.00	
bt05	9/ 9	9.6e+02	0.00		lukvle01	12/ 12	6.2e+00	0.05	
bt06	14/ 14	2.8e-01	0.00		lukvle02	13/ 13	2.8e+04	0.08	
bt07	28/ 26	3.6e+02	0.00		lukvle03	12/ 12	1.4e+01	0.02	
bt08	233/ 54	1.0e+00	0.00		lukvle04	63/ 31	4.8e+03	0.15	
bt09	15/ 15	-1.0e+00	0.00		lukvle05	3026/ 3001	1.1e+03	13.82	1
bt11	12/ 12	8.2e-01	0.00		lukvle06	30/ 30	6.3e+04	0.17	
bt12	8/ 8	6.2e+00	0.00		lukvle07	21/ 20	-1.1e+03	0.03	
byrdsphr	13/ 11	-4.7e+00	0.00		lukvle08	134142/ 3001	-9.8e+04	46.93	5
catena	3826/ 576	-2.1e+06	9.13		lukvle09	58/ 40	1.0e+02	0.04	
chain1	69/ 33	5.1e+00	0.11		lukvle10	24/ 23	3.5e+02	0.11	
chain2	17/ 15	5.1e+00	0.13		lukvle11	35/ 14	1.7e-19	0.04	
chain3	26/ 23	5.1e+00	0.47		lukvle12	20/ 20	1.5e+03	0.12	
dixchlng	12/ 12	2.5e+03	0.00		lukvle13	40/ 32	3.1e+03	0.21	
dtoc1na	8/ 8	1.3e+01	0.19		lukvle14	46/ 46	5.1e+03	0.20	
dtoc1nb	9/ 9	1.6e+01	0.21		lukvle15	74/ 70	1.9e+01	0.28	
dtoc1nc	12/ 12	2.5e+01	0.33		lukvle16	34/ 19	3.5e+01	0.05	
dtoc1nd	103/ 79	1.3e+01	1.32		lukvle17	22/ 22	1.0e+03	0.07	
dtoc2	5/ 5	4.7e-01	0.10		lukvle18	10/ 10	1.0e+03	0.02	
dtoc5	8/ 8	1.5e+00	0.17		maratos	5/ 5	-1.0e+00	0.00	
dtoc6	28/ 28	1.3e+05	0.60		mwright	10/ 10	2.5e+01	0.00	
eigena2	9/ 9	1.9e-29	0.03		orthrdm2	10/ 10	1.6e+02	0.18	
eigenaco	11/ 11	3.9e-30	0.06		orthrega	125/ 118	1.4e+03	0.82	
eigenb2	59/ 56	7.8e-24	0.27		orthregb	6/ 6	3.1e-33	0.00	
eigenbco	115/ 74	1.7e-18	0.54		orthregc	20/ 19	1.9e+02	4.89	
eigenc2	54/ 54	9.6e-18	5.39		orthregd	19/ 19	1.5e+03	1.37	
eigencco	15/ 15	2.5e-27	0.01		orthrgdm	19/ 18	1.5e+03	1.26	
elec1	35/ 35	1.1e+03	0.38		orthrgds	143/ 143	1.6e+03	6.22	
elec2	69/ 62	4.4e+03	3.24		robot	144/ 53	6.6e+00	0.00	
elec3	165/ 153	1.8e+04	42.96		s216	16/ 15	1.0e+00	0.00	
gilbert	22/ 22	4.8e+02	0.07		s219	22/ 22	-1.0e+00	0.00	
gridnetb	8/ 8	1.4e+02	0.47		s235	9/ 9	4.0e-02	0.00	
hager1	6/ 6	8.8e-01	0.09		s269	6/ 6	4.1e+00	0.00	
hager2	6/ 6	4.3e-01	10.62		s316	13/ 13	3.3e+02	0.00	
hager3	6/ 6	1.4e-01	0.18		s317	12/ 12	3.7e+02	0.00	
hs006	25/ 19	0.0e+00	0.00		s318	12/ 12	4.1e+02	0.00	
hs007	26/ 20	-1.7e+00	0.00		s319	11/ 11	4.5e+02	0.00	
hs009	170158/ 2998	-5.0e-01	0.32	1	s320	12/ 12	4.9e+02	0.00	
hs026	28/ 28	8.5e-17	0.00		s321	12/ 12	5.0e+02	0.00	
hs027	23/ 22	4.0e-02	0.00		s322	18/ 17	5.0e+02	0.00	
hs028	6/ 6	2.5e-32	0.00		s335	63/ 27	-4.5e-03	0.00	
hs039	15/ 15	-1.0e+00	0.00		s336	84/ 46	-3.4e-01	0.00	
hs040	5/ 5	-2.5e-01	0.00		s338	33/ 28	-1.1e+01	0.00	
hs046	197/ 51	5.9e-16	0.00		s344	8/ 8	3.3e-02	0.00	
hs047	26/ 26	1.0e-13	0.00		s345	18/ 14	3.3e-02	0.00	
hs048	8/ 8	0.0e+00	0.00		s375	16/ 16	-1.5e+01	0.00	
hs049	21/ 21	2.1e-12	0.00		s378	22/ 20	-4.8e+01	0.00	
hs050	12/ 12	4.3e-17	0.00		s394	16/ 16	1.9e+00	0.00	
hs051	33/ 13	5.3e-17	0.00		s395	18/ 18	1.9e+00	0.00	

# Annexe B. Résultats numériques de SPDOPT

TABLE B.8 – Résultats de SPDOPT-AL sur des problèmes de la collection MacMPEC

Problème	#f/#g	f	CPU	e	Problème	#f/#g	f	CPU	e
bar-truss-3	12413/3001	3.6e−03	0.65	1	gauvin	32/32	5.0e−11	0.00	
bard1	9/9	2.0e+00	0.00		hs044-i	81/36	6.3e−06	0.00	
bard1m	10/10	2.0e+00	0.00		incid-set1-8	5296/1159	−4.1e−07	4.75	
bard2	29/29	−6.6e+03	0.00		incid-set1c-8	162/45	−4.1e−07	0.18	
bard2m	29/29	−6.6e+03	0.00		incid-set2-8	35/34	5.0e−03	0.10	
bard3	23/20	−1.3e+01	0.00		incid-set2c-8	26/26	5.5e−03	0.07	
bard3m	12/12	−1.6e+01	0.00		jr1	6/6	5.0e−01	0.00	
bilevel1	11/11	−3.0e+01	0.00		jr2	7/7	1.3e−20	0.00	
bilevel2	20/20	−6.6e+03	0.00		kth1	3/3	−1.8e−08	0.00	
bilevel3	10/10	−1.6e+01	0.00		kth2	6/6	−9.9e−09	0.00	
bilin	10/10	−5.8e+01	0.00		kth3	3/3	2.3e−18	0.00	
dempe	874/389	1.6e+01	0.01	7	nash1	8/8	9.8e−22	0.00	
design-cent-1	15244/3001	−8.3e+06	0.22	1	nash1a	8/8	9.8e−22	0.00	
design-cent-2	79/77	−2.3e+01	0.01	7	outrata31	11/11	2.6e+00	0.00	
design-cent-4	8/8	−4.0e+00	0.00		outrata32	12/12	2.6e+00	0.00	
design-init-1	5/5	−4.9e−09	0.00		outrata33	10/10	2.7e+00	0.00	
design-init-2	5/5	−4.9e−09	0.00		outrata34	13/13	2.6e+00	0.00	
design-init-3	5/5	−4.9e−09	0.00		pack-comp1-8	39/33	6.0e−01	0.07	
design-init-4	6/6	−9.9e−09	0.00		pack-comp1c-8	19/19	6.0e−01	0.03	
desilva	15/15	−1.0e+00	0.00		pack-comp2c-8	17/17	6.7e−01	0.03	
df1	15/15	3.3e−09	0.00		pack-rig1-8	16/16	7.9e−01	0.02	
ex9.1.1	9/9	−1.3e+01	0.00		pack-rig1c-8	16/16	7.9e−01	0.02	
ex9.1.10	28/28	−3.3e+00	0.00		pack-rig1p-8	25/25	7.9e−01	0.04	
ex9.1.2	7/7	−6.3e+00	0.00		pack-rig2-8	16/16	7.8e−01	0.02	
ex9.1.3	352/70	−5.8e+01	0.01	3	pack-rig2c-8	21/21	8.0e−01	0.02	
ex9.1.4	7/7	−3.7e+01	0.00		pack-rig2p-8	26/26	7.8e−01	0.04	
ex9.1.5	7/7	−1.0e+00	0.00		portfl-i-1	169265/3001	3.4e−09	4.62	1
ex9.1.6	12/12	−5.2e+01	0.00		qpec1	7/7	8.0e+01	0.00	
ex9.1.7	11/11	−5.0e+01	0.00		qpec2	7/7	1.1e−19	0.00	
ex9.1.8	28/28	−3.3e+00	0.00		ralphmod	949/284	−6.8e+02	5.59	
ex9.1.9	115/41	2.0e+00	0.00		scholtes1	7/7	2.0e+00	0.00	
ex9.2.1	9/9	2.0e+00	0.00		scholtes2	8/8	1.5e+01	0.00	
ex9.2.2	10/10	5.0e+01	0.00		scholtes3	7/7	1.0e−20	0.00	
ex9.2.3	12/12	5.0e+00	0.00		scholtes5	6/6	1.0e+00	0.00	
ex9.2.4	9/9	2.0e−20	0.00		sl1	14/14	1.0e−04	0.00	
ex9.2.5	8/8	9.2e−23	0.00		stackelberg1	9/9	−3.3e+03	0.00	
ex9.2.6	8/8	−1.5e+00	0.00		tap-09	17/17	1.1e+02	0.01	
ex9.2.7	9/9	2.0e+00	0.00		tap-15	27/27	1.8e+02	0.03	
ex9.2.8	706/137	1.0e+00	0.01	5	water-net	5002/3001	2.3e+03	0.91	1
ex9.2.9	7/7	2.0e+00	0.00						



## Annexe C

# Résultats numériques de IPOPT

Nous présentons dans cette annexe les résultats numériques obtenus avec IPOPT sur l'ensemble des problèmes donnés dans les tableaux A.1-A.4. Le tableau C.2 énumère les résultats de IPOPT utilisés dans les comparaisons du chapitre 2. Les tableaux C.3-C.6 énumèrent les résultats de IPOPT utilisés dans l'étude numérique du chapitre 4. Pour chaque problème, nous donnons les nombres suivants : nombre d'évaluations de fonctions (#f) et de gradients (#g), nombre de factorisations (#fact)<sup>15</sup>, valeur finale de la fonction objectif (f), temps CPU en secondes (CPU). Un nombre positif dans la colonne (e) indique un échec. Le tableau C.1 donne les différents types d'erreurs retournées par IPOPT.

e	Message d'erreur
1	Nombre maximum d'itérations atteint
2	Temps CPU maximum dépassé
3	Direction de recherche devient trop petite
4	Correction de l'inertie échoue
5	Convergence vers un point non réalisable
6	Problème résolu à un niveau acceptable
7	Phase de restauration échoue
8	Ne peut pas calculer les multiplicateurs pour le problème de réalisabilité
9	Divergence des itérés

TABLE C.1 – Les messages d'erreur retournés par IPOPT

---

15. Le nombre de factorisations n'est donné que pour les problèmes de la forme ( $P_E$ ).

TABLE C.2 – Résultats de IPOPT sur des problèmes d'égalité de CUTer et COPS

Problème	Problèmes standards					Problèmes dégénérés				
	#f/#g	#fact	f	CPU	e	#f/#g	#fact	f	CPU	e
aug2d	2/2	1	1.7e+06	0.31		11/11	13	1.7e+06	2.20	
aug3d	3/3	5	5.5e+02	0.90		12/12	20	5.5e+02	2.13	
aug3dc	2/2	1	7.7e+02	0.06		12/11	13	7.7e+02	0.45	
bt01	15/8	21	-1.0e+00	0.02		74/49	70	-1.0e+00	0.09	8
bt02	13/13	12	3.3e-02	0.02		171/82	178	3.3e-02	0.16	
bt03	2/2	1	4.1e+00	0.01		58/16	31	4.1e+00	0.04	
bt04	10/10	16	-3.7e+00	0.02		63/16	42	-3.8e+01	0.05	8
bt05	8/8	7	9.6e+02	0.01		63/11	34	9.6e+02	0.04	8
bt06	18/14	13	2.8e-01	0.03		74/43	86	2.8e-01	0.08	
bt07	32/14	19	3.1e+02	0.03		137/35	61	3.1e+02	0.09	
bt08	29/29	84	1.0e+00	0.06		57/20	50	1.0e+00	0.05	
bt09	14/14	16	-1.0e+00	0.02		129/63	115	-1.0e+00	0.13	
bt11	9/9	8	8.2e-01	0.02		44/39	56	8.2e-01	0.07	
bt12	5/5	4	6.2e+00	0.01		106/39	97	6.2e+00	0.09	
byrdsphr	19/19	28	-4.7e+00	0.04		267/16	304	-4.1e+00	0.40	8
catena	633/198	447	-2.1e+06	152.40		5624/1305	6006	-7.1e+05	2773.78	4
chain1	8/8	9	5.1e+00	0.06		14/13	22	5.1e+00	0.34	
chain2	10/9	10	5.1e+00	0.12		13/12	19	5.1e+00	2.48	
chain3	1257/286	685	5.1e+00	75.27		8651/62	3087	5.7e+00	109.97	1
dixchlng	11/11	10	2.5e+03	0.02		21/15	22	2.5e+03	0.03	
dtoc1na	7/7	6	1.3e+01	0.12		7/7	9	1.3e+01	0.15	
dtoc1nb	7/7	6	1.6e+01	0.12		7/7	9	1.6e+01	0.15	
dtoc1nc	21/16	22	2.5e+01	0.35		25/19	37	2.5e+01	0.48	
dtoc1nd	40/28	56	1.3e+01	0.45		28/23	43	1.3e+01	0.33	
dtoc2	13/11	14	5.1e-01	0.97		27/23	40	5.1e-01	2.73	
dtoc5	5/5	4	1.5e+00	0.17		19/13	15	1.5e+00	0.47	
dtoc6	13/13	12	1.3e+05	0.47		251/154	176	1.3e+05	5.24	
eigena2	3/3	4	1.2e-29	0.02		5/5	7	2.5e-22	0.03	
eigenaco	4/4	4	0.0e+00	0.03		7/7	11	8.4e-27	0.04	
eigenb2	14/14	24	1.8e+01	0.10		95/88	211	2.1e-27	0.82	
eigenbco	105/83	180	2.7e-23	1.42		100/72	159	5.3e-19	0.97	
eigenc2	26/22	31	1.8e-17	3.17		35/24	52	4.2e-28	5.42	
eigencco	13/13	24	5.7e-21	0.04		13/13	24	3.6e-20	0.03	
elec1	47/42	95	1.1e+03	1.38		47/47	109	1.1e+03	0.82	
elec2	302/206	503	4.4e+03	42.05		153/110	266	4.4e+03	10.62	
elec3	257/164	401	1.8e+04	253.99		128/41	150	2.2e+04	63.38	7
gilbert	20/20	22	4.8e+02	0.12		1620/1513	1590	4.8e+02	1912.38	6
gridnetb	2/2	1	1.4e+02	0.21		38/10	18	1.4e+02	1.75	
hager1	2/2	1	8.8e-01	0.07		103/49	68	8.8e-01	1.58	
hager2	2/2	1	4.3e-01	1.10		102/29	64	4.3e-01	2.02	
hager3	2/2	1	1.4e-01	0.09		102/29	64	1.4e-01	2.46	
hs006	7/6	10	0.0e+00	0.01		112/112	181	2.3e-18	0.17	8
hs007	28/28	55	-1.7e+00	0.05		139/21	190	6.9e-01	0.23	8
hs009	6/4	5	-5.0e-01	0.01		1/1	0	0.0e+00	0.00	8
hs026	26/26	25	1.3e-16	0.04		80/49	84	1.0e-14	0.09	
hs027	160/58	70	4.0e-02	0.12		162/106	236	4.0e-02	0.20	
hs028	2/2	1	6.2e-32	0.00		2/2	2	2.5e-31	0.01	
hs039	14/14	16	-1.0e+00	0.03		288/202	266	-1.0e+00	0.37	
hs040	4/4	3	-2.5e-01	0.01		9/9	15	-2.5e-01	0.02	8
hs046	20/20	19	8.6e-16	0.03		38/29	43	4.3e-16	0.06	
hs047	21/20	19	6.6e-14	0.03		53/47	88	-1.0e-14	0.08	
hs048	2/2	1	8.4e-31	0.00		2/2	2	4.4e-31	0.01	
hs049	21/21	20	2.1e-12	0.03		21/21	23	2.1e-12	0.04	
hs050	10/10	9	0.0e+00	0.02		10/10	12	7.1e-26	0.02	
hs051	2/2	1	0.0e+00	0.00		2/2	2	0.0e+00	0.01	
hs052	2/2	1	5.3e+00	0.01		42/11	22	5.3e+00	0.03	
hs061	10/10	10	-1.4e+02	0.02		52/10	45	3.3e+02	0.06	8
hs077	13/12	11	2.4e-01	0.02		82/20	37	2.4e-01	0.06	
hs078	5/5	4	-2.9e+00	0.01		24/18	28	-2.9e+00	0.04	
hs079	5/5	4	7.9e-02	0.01		67/36	54	7.9e-02	0.07	
hs100lnp	21/21	25	6.8e+02	0.04		105/91	136	6.8e+02	0.19	
lukvle01	7/7	6	6.2e+00	0.05		17/2	21	3.8e+01	0.21	7
lukvle02	10/10	9	2.8e+04	0.09		130/86	110	2.8e+04	1.09	
lukvle03	11/11	10	1.4e+01	0.05		63/29	52	1.4e+01	0.17	
lukvle04	18/18	17	4.7e+04	0.11		214/44	218	5.8e+03	1.34	5

# Annexe C. Résultats numériques de IPOPT

Problème	Problèmes standard					Problèmes dégénérés				
	#f/ #g	#fact	f	CPU	e	#f/ #g	#fact	f	CPU	e
lukvle05	24/20	24	3.1e−15	0.18		81/37	79	4.1e+00	0.68	
lukvle06	16/16	21	6.3e+04	0.20		26/26	42	6.3e+04	0.29	
lukvle07	13/13	19	−1.1e+03	0.05		64/35	61	−1.1e+03	0.14	
lukvle08	17/17	21	−9.8e+04	0.13		3006/3001	3010	−9.8e+04	20.42	1
lukvle09	24/23	32	1.0e+02	0.08		3221/2970	6085	4.4e+06	16.00	1
lukvle10	21/14	18	3.5e+02	0.12		168/64	116	3.5e+02	0.61	
lukvle11	9/9	8	4.4e−24	0.05		105/62	120	2.2e+02	0.41	6
lukvle12	9/9	13	1.5e+03	0.09		42/18	30	1.5e+03	0.22	
lukvle13	39/26	39	3.1e+03	0.28		147/69	98	3.1e+03	0.71	
lukvle14	30/27	35	5.2e+03	0.19		329/293	342	5.2e+03	1.76	
lukvle15	8439/2453	5315	9.1e−28	25.41		3438/1997	4695	4.3e−27	21.68	
lukvle16	9/9	12	3.5e+01	0.06		64/22	66	3.5e+01	0.23	
lukvle17	10/10	17	1.0e+03	0.07		36/34	51	1.0e+03	0.22	
lukvle18	14/14	20	1.0e+03	0.09		41/39	58	1.0e+03	0.22	
maratos	5/5	4	−1.0e+00	0.01		73/19	37	−2.9e−01	0.05	8
mwright	11/11	16	2.5e+01	0.03		18/2	18	3.9e+01	0.05	7
orthrdm2	8/7	6	1.6e+02	0.17		13/12	23	1.7e+02	0.30	
orthrega	78/61	138	1.4e+03	0.94		178/108	250	1.4e+03	0.84	
orthregb	3/3	4	4.5e−20	0.01		316/183	602	1.9e−01	0.46	3
orthregc	28/15	27	1.9e+02	8.45		58/40	88	1.9e+02	7.77	
orthregd	15/13	17	1.5e+03	0.71		1206/841	1032	1.5e+03	42.37	
orthrgdm	373/59	384	6.9e+04	21.31	7	36/23	50	1.6e+03	1.76	
orthrgds	22/17	29	1.5e+03	1.00		118/79	191	1.5e+03	7.49	
robot	10/9	24	1.3e+01	0.02		191/82	163	5.5e+00	0.15	
s216	9/7	6	1.0e+00	0.01		53/8	59	3.2e+04	0.07	8
s219	75/51	67	−1.0e+00	0.08		440/74	209	−1.0e+00	0.24	
s235	26/14	13	4.0e−02	0.03		135/40	73	4.0e−02	0.08	
s269	2/2	1	4.1e+00	0.00		42/11	22	4.1e+00	0.03	
s316	8/8	15	3.3e+02	0.02		36/8	13	3.3e+02	0.03	8
s317	10/10	17	3.7e+02	0.02		35/9	18	3.8e+02	0.03	8
s318	11/11	18	4.1e+02	0.02		91/31	53	1.1e+03	0.08	8
s319	12/12	19	4.5e+02	0.02		72/13	70	1.3e+03	0.10	8
s320	14/14	21	4.9e+02	0.02		60/16	59	7.2e+02	0.08	8
s321	20/17	30	5.0e+02	0.03		61/11	60	9.1e+02	0.09	8
s322	95/33	72	5.0e+02	0.08		63/22	60	8.0e+02	0.08	8
s335	26/26	25	−4.5e−03	0.04		67/22	71	2.9e−06	0.09	8
s336	18/18	31	−3.4e−01	0.03		79/78	109	−3.4e−01	0.12	
s338	39/39	81	−1.1e+01	0.07		79/40	73	−1.1e+01	0.07	
s344	8/8	7	3.3e−02	0.01		77/62	134	3.3e−02	0.10	
s345	13/11	12	3.3e−02	0.02		61/47	110	3.3e−02	0.08	
s375	20/20	37	−1.5e+01	0.04		119/28	87	−1.2e+01	0.11	8
s378	16/16	23	−4.8e+01	0.03		533/83	348	−4.7e+01	0.39	3
s394	17/17	27	1.9e+00	0.04		45/2	80	1.1e+01	0.13	7
s395	19/19	29	1.9e+00	0.03		133/41	177	1.9e+00	0.28	

TABLE C.3 – Résultats de IPOPT sur des problèmes de la collection Hock et Schittkowski

Problème	#f/ #g	f	CPU	e	Problème	#f/ #g	f	CPU	e
hs010	13/ 13	-1.0e+00	0.01		hs100	22/ 12	6.8e+02	0.02	
hs011	9/ 9	-8.5e+00	0.01		hs100mod	27/ 11	6.8e+02	0.02	
hs012	9/ 9	-3.0e+01	0.01		hs101	229/ 62	1.8e+03	0.13	
hs013	79/ 56	9.9e-01	0.06		hs102	44/ 23	9.1e+02	0.03	
hs014	8/ 8	1.4e+00	0.01		hs103	573/ 152	5.4e+02	0.32	
hs015	22/ 18	3.1e+02	0.02		hs104	11/ 10	4.0e+00	0.01	
hs016	10/ 10	2.3e+01	0.01		hs106	17/ 17	7.0e+03	0.02	
hs017	23/ 20	1.0e+00	0.02		hs107	13/ 13	5.1e+03	0.02	
hs018	27/ 18	5.0e+00	0.02		hs108	17/ 17	-6.7e-01	0.03	
hs019	15/ 15	-7.0e+03	0.02		hs109	44/ 22	5.3e+03	0.03	
hs020	9/ 9	4.0e+01	0.01		hs111	16/ 16	-4.8e+01	0.02	
hs021	9/ 9	-1.0e+02	0.01		hs112	18/ 18	-4.8e+01	0.02	
hs022	7/ 7	1.0e+00	0.01		hs113	12/ 12	2.4e+01	0.02	
hs023	12/ 11	2.0e+00	0.01		hs114	20/ 20	-1.8e+03	0.02	
hs024	12/ 11	-1.0e+00	0.01		hs116	25/ 25	9.8e+01	0.03	
hs029	9/ 9	-2.3e+01	0.01		hs117	23/ 23	3.2e+01	0.03	
hs030	26/ 19	1.0e+00	0.02		hs118	12/ 12	6.6e+02	0.02	
hs031	8/ 8	6.0e+00	0.01		hs119	17/ 17	2.4e+02	0.02	
hs032	20/ 17	1.0e+00	0.02		hs21mod	17/ 17	-9.6e+01	0.02	
hs033	16/ 12	-4.6e+00	0.01		hs268	18/ 18	2.5e-09	0.02	
hs034	10/ 10	-8.3e-01	0.01		hs35mod	16/ 16	2.5e-01	0.02	
hs035	8/ 8	1.1e-01	0.01		hs44new	14/ 14	-1.5e+01	0.02	
hs036	13/ 13	-3.3e+03	0.02		hs99exp	54/ 25	-1.0e+09	0.04	
hs037	13/ 13	-3.5e+03	0.02		s215	15/ 15	-8.6e-09	0.02	
hs041	11/ 10	1.9e+00	0.01		s217	10/ 10	-8.0e-01	0.01	
hs042	7/ 7	1.4e+01	0.01		s218	17/ 17	-8.2e-09	0.02	
hs043	10/ 10	-4.4e+01	0.01		s220	4/ 4	1.0e+00	0.00	
hs044	22/ 19	-1.3e+01	0.02		s221	80/ 45	-1.0e+00	0.06	
hs053	7/ 7	4.1e+00	0.01		s222	7/ 7	-1.5e+00	0.01	
hs054	8/ 8	1.9e-01	0.01		s223	10/ 10	-8.3e-01	0.01	
hs055	4/ 4	6.7e+00	0.00	8	s224	14/ 9	-3.0e+02	0.01	
hs056	40/ 39	-3.5e+00	0.05		s225	12/ 11	2.0e+00	0.01	
hs057	28/ 23	3.1e-02	0.03		s226	9/ 9	-5.0e-01	0.01	
hs059	72/ 44	-7.8e+00	0.06		s227	8/ 8	1.0e+00	0.01	
hs060	8/ 8	3.3e-02	0.01		s228	10/ 10	-3.0e+00	0.01	
hs062	10/ 9	-2.6e+04	0.01		s230	10/ 10	3.7e-01	0.01	
hs063	8/ 8	9.6e+02	0.01		s231	38/ 28	2.3e-17	0.03	
hs064	19/ 19	6.3e+03	0.02		s232	18/ 15	-1.0e+00	0.02	
hs065	91/ 29	9.5e-01	0.04		s233	11/ 11	1.9e-17	0.01	
hs066	8/ 8	5.2e-01	0.01		s234	16/ 16	-8.0e-01	0.02	
hs067	12/ 12	-1.2e+03	0.01		s236	15/ 15	-8.2e+00	0.02	
hs070	36/ 21	9.4e-03	0.03		s237	27/ 27	-5.9e+01	0.03	
hs071	9/ 9	1.7e+01	0.01		s238	79/ 35	-5.9e+01	0.05	
hs072	17/ 17	7.3e+02	0.02		s239	14/ 14	-8.2e+00	0.02	
hs073	9/ 9	3.0e+01	0.01		s247	8/ 8	1.3e-19	0.01	
hs074	10/ 10	5.1e+03	0.01		s248	14/ 14	-8.0e-01	0.02	
hs075	10/ 10	5.2e+03	0.01		s249	8/ 8	1.0e+00	0.01	
hs076	8/ 8	-4.7e+00	0.01		s250	13/ 13	-3.3e+03	0.01	
hs080	7/ 7	5.4e-02	0.01		s251	13/ 13	-3.5e+03	0.02	
hs081	8/ 8	5.4e-02	0.01		s252	34/ 23	4.0e-02	0.03	
hs083	16/ 16	-3.1e+04	0.02		s253	19/ 19	6.9e+01	0.02	
hs084	20/ 20	-5.3e+06	0.02		s262	9/ 9	-1.0e+01	0.01	
hs085	30/ 30	-1.9e+00	0.04		s263	22/ 22	-1.0e+00	0.02	
hs086	11/ 11	-3.2e+01	0.01		s264	10/ 10	-4.4e+01	0.01	
hs087	18/ 18	8.8e+03	0.02		s265	6/ 6	1.9e+00	0.01	
hs088	18/ 17	1.4e+00	0.02		s268	18/ 18	2.5e-09	0.02	
hs089	38/ 21	1.4e+00	0.03		s270	17/ 17	1.9e-09	0.02	
hs090	28/ 22	1.4e+00	0.04		s277	12/ 12	5.1e+00	0.01	
hs091	16/ 16	1.4e+00	0.03		s278	15/ 13	7.8e+00	0.02	
hs092	25/ 20	1.4e+00	0.04		s279	12/ 12	1.1e+01	0.01	
hs093	10/ 10	1.4e+02	0.01		s280	14/ 14	1.3e+01	0.02	
hs095	30/ 21	1.6e-02	0.03		s284	32/ 30	-1.8e+03	0.04	
hs096	23/ 20	1.6e-02	0.02		s285	18/ 15	-8.3e+03	0.02	
hs097	18/ 18	4.1e+00	0.02		s315	14/ 14	-8.0e-01	0.02	
hs098	16/ 16	4.1e+00	0.02		s323	8/ 8	3.8e+00	0.01	
hs099	12/ 12	-8.3e+08	0.02		s324	29/ 18	5.0e+00	0.02	

# Annexe C. Résultats numériques de IPOPT

Problème	#f/ #g	f	CPU	e	Problème	#f/ #g	f	CPU	e
s325	9/ 9	3.8e+00	0.01		s365	36/ 23	5.2e+01	0.03	
s326	9/ 9	-8.0e+01	0.01		s366	21/ 21	1.2e+03	0.03	
s327	25/ 21	3.1e-02	0.02		s367	27/ 26	-3.7e+01	0.03	
s329	15/ 15	-7.0e+03	0.02		s369	14/ 14	7.0e+03	0.02	
s330	11/ 11	1.6e+00	0.01		s372	70/ 53	2.3e+04	0.07	
s331	7/ 7	4.3e+00	0.01		s374	74/ 74	2.3e-01	0.13	
s332	6128/ 3001	3.1e+01	3.94	1	s376	40/ 40	-4.4e+03	0.05	
s337	8/ 8	6.0e+00	0.01		s377	24/ 24	-8.0e+02	0.03	
s339	9/ 9	3.4e+00	0.01		s380	62/ 41	3.2e+00	0.05	
s341	9/ 9	-2.3e+01	0.01		s381	12/ 12	1.0e+00	0.01	
s342	13/ 13	-2.3e+01	0.01		s382	10/ 10	1.0e+00	0.01	
s343	35/ 12	-5.7e+00	0.02		s383	12/ 12	7.3e+05	0.01	
s346	35/ 12	-5.7e+00	0.02		s384	14/ 14	-8.3e+03	0.02	
s353	11/ 9	-4.0e+01	0.01		s385	22/ 21	-8.3e+03	0.03	
s354	11/ 11	1.1e-01	0.01		s387	25/ 25	-8.2e+03	0.03	
s355	88/ 37	7.0e+01	0.05		s388	27/ 24	-5.8e+03	0.03	
s357	12/ 12	3.6e-01	0.03		s389	44/ 33	-5.8e+03	0.05	
s359	17/ 17	-5.5e+06	0.02		s392	38/ 38	-1.1e+06	0.05	
s360	31/ 31	-5.3e+06	0.04		s393	35/ 34	8.6e-01	0.06	
s361	19/ 19	-1.5e+04	0.02						



TABLE C.4 – Résultats de IPOPT sur des problèmes de la collection CUTEst

Problème	#f/ #g	f	CPU	e	Problème	#f/ #g	f	CPU	e
A0ENDNDL	11/ 11	-2.6e-04	0.46		AUG3DCQP	25/ 25	6.2e+04	40.92	
A0ENINDL	11/ 11	-2.6e-04	0.46		AUG3DQP	25/ 25	5.4e+04	41.23	
A0ENSNDL	52/ 47	-2.1e-04	58.27		AVGASA	11/ 11	-4.6e+00	0.01	
A0ESDNDL	11/ 11	-2.6e-04	0.46		AVGASB	13/ 13	-4.5e+00	0.01	
A0ESINDL	11/ 11	-2.6e-04	0.45		AVION2	510/ 238	9.5e+07	0.17	6
A0ESSNDL	52/ 47	-2.1e-04	59.96		BATCH	88/ 82	2.6e+05	0.05	
A0NNDNDL	24/ 24	-2.6e-04	1.54		BDRY2	-/-	-	-	2
A0NNDNIL	98/ 98	-2.5e-04	9.50		BIGBANK	28/ 28	-4.2e+06	0.15	
A0NNDNSL	67/ 62	-4.2e-03	11.70		BIGGSC4	34/ 27	-2.5e+01	0.01	
A0NNSNSL	80/ 51	-2.6e-04	128.80		BLOCKQP1	3009/ 3001	-2.1e+03	160.88	1
A0NSDSDL	21/ 21	-2.6e-04	1.34		BLOCKQP2	20/ 20	-5.0e+03	0.83	
A0NSDSDS	462/ 229	-2.7e-05	3.34		BLOCKQP3	3006/ 3001	-9.3e+02	160.94	1
A0NSDSL	101/ 101	-2.5e-04	9.74		BLOCKQP4	33/ 33	-2.5e+03	1.48	
A0NSDSSL	42/ 38	-4.3e-01	6.53		BLOCKQP5	3001/ 3001	-8.1e+02	161.15	1
A0NSSSSL	151/ 80	-9.0e-04	53.55		BLOWEYA	10/ 10	-2.3e-02	0.13	
A2ENDNDL	20/ 20	-2.1e-04	0.84		BLOWEYB	9/ 9	-1.5e-02	0.12	
A2ENINDL	20/ 20	-2.1e-04	0.83		BLOWEYC	10/ 10	-1.5e-02	0.13	
A2ENSNDL	65/ 58	-1.7e-04	70.34		BRAINPC0	296/ 176	2.1e+06	32.64	7
A2ESDNDL	20/ 20	-2.1e-04	0.84		BRAINPC1	-/-	-	-	2
A2ESINDL	20/ 20	-2.1e-04	0.83		BRAINPC2	496/ 140	3.9e+00	107.02	7
A2ESSNDL	68/ 61	-1.7e-04	75.22		BRAINPC3	-/-	-	-	2
A2NNDNDL	33/ 33	-2.1e-04	2.37		BRAINPC4	771/ 104	7.7e+06	21.00	7
A2NNDNIL	415/ 278	1.1e+02	45.20	5	BRAINPC5	1333/ 164	3.1e+06	32.59	7
A2NNDNSL	125/ 110	-3.5e-02	34.39		BRAINPC6	274/ 128	3.2e+06	23.40	7
A2NNSNSL	730/ 348	-4.1e-04	364.37		BRAINPC7	-/-	-	-	2
A2NSDSDL	30/ 30	-2.1e-04	1.94		BRAINPC8	-/-	-	-	2
A2NSDSL	679/ 382	2.4e+01	88.45	5	BRAINPC9	-/-	-	-	2
A2NSDSSL	113/ 68	-2.6e-03	14.58		BRIDGEND	58/ 58	5.4e+01	0.70	
A2NSSSSL	650/ 271	-4.6e-04	289.40		BRITGAS	10741/ 2985	1.7e+00	12.95	1
A4X12	248/ 227	6.8e-01	1.13		BT13	26/ 26	-7.5e-09	0.01	
A5ENDNDL	20/ 20	-1.3e-04	0.83		BTS4	43/ 42	6.9e+07	41.61	
A5ENINDL	20/ 20	-1.2e-04	0.82		BURKEHAN	20/ 6	-2.2e-06	0.01	5
A5ENSNDL	62/ 52	-9.3e-05	67.62		CAMSHAPE	146/ 108	-4.3e+00	0.70	
A5ESDNDL	20/ 20	-1.3e-04	0.83		CANTILVR	12/ 12	1.3e+00	0.01	
A5ESINDL	20/ 20	-1.2e-04	0.83		CAR2	134/ 63	2.7e+00	36.33	
A5ESSNDL	62/ 52	-9.3e-05	69.85		CATMIX	85/ 85	-4.8e-02	1.16	6
A5NNDNDL	42/ 42	-1.3e-04	3.02		CB2	9/ 9	2.0e+00	0.01	
A5NNDNIL	512/ 437	6.3e+01	325.05	5	CB3	10/ 10	2.0e+00	0.01	
A5NNDNSL	648/ 403	-6.2e-03	270.57		CBS	40/ 40	5.4e+06	0.90	
A5NNSNSL	425/ 150	-2.0e-02	485.56		CHACONN1	7/ 7	2.0e+00	0.00	
A5NSDSDL	29/ 29	-1.3e-04	1.87		CHACONN2	11/ 10	2.0e+00	0.01	
A5NSDSDM	462/ 229	-2.7e-05	3.34		CHANDHEQ	15/ 15	0.0e+00	0.12	
A5NSDSL	165/ 129	1.3e+00	154.56	6	CHEMRCTA	152/ 14	0.0e+00	0.46	
A5NSDSSL	121/ 94	-1.7e-02	47.58		CHEMRCTB	145/ 14	0.0e+00	0.40	
A5NSSNSM	462/ 229	-2.7e-05	3.38		CLNLBEAM	777/ 745	3.4e+02	12.62	
A5NSSSSL	1394/ 646	2.4e+01	3352.58	7	CONCON	10/ 10	-6.2e+03	0.01	
ACOPP118	20/ 20	1.3e+05	0.14		CONGIGMZ	33/ 29	2.8e+01	0.01	
ACOPP14	12/ 12	8.1e+03	0.02		CONT5-QP	-/-	-	-	2
ACOPP300	42/ 42	7.2e+05	0.59		CORE1	109/ 74	9.1e+01	0.07	
ACOPP30	22/ 22	5.8e+02	0.05		CORE2	288/ 184	7.3e+01	0.31	
ACOPP57	26/ 15	4.2e+04	0.05		CORKSCRW	244/ 224	8.2e+01	2.65	
ACOPR118	817/ 552	1.3e+05	3.37		COSHFUN	-/-	-	-	2
ACOPR14	65/ 59	8.1e+03	0.07		C-RELOAD	317/ 287	-1.0e+00	3.75	
ACOPR300	42/ 42	7.2e+05	0.46		CRESC100	2058/ 493	-1.2e-13	2.84	5
ACOPR30	23/ 22	5.8e+02	0.11		CRESC132	-/-	-	-	2
ACOPR57	91/ 39	4.2e+04	0.40		CRESC4	3923/ 633	8.7e-01	0.62	
AGG	205/ 194	-3.6e+07	0.43		CRESC50	4632/ 834	-1.8e-13	1.73	5
AIRPORT	16/ 16	4.8e+04	0.03		CSFI1	71/ 19	-4.9e+01	0.01	
ALJAZZAF	79/ 52	3.7e+04	0.10		CSFI2	64/ 21	5.5e+01	0.01	
ALLINITA	25/ 24	3.3e+01	0.01		CVXQP1	14/ 14	3.6e+03	0.01	
ALLINITC	33/ 24	3.0e+01	0.01		CVXQP2	15/ 15	1.9e+03	0.01	
ALLINQP	26/ 26	-5.5e+03	3.31		CVXQP3	13/ 13	4.3e+03	0.01	
ALSOTAME	9/ 9	8.2e-02	0.01		DALE	21/ 21	1.8e+04	0.75	
ANTWERP	1049/ 428	3.2e+03	0.28	6	DALLASL	64/ 34	-2.0e+05	0.17	
AUG2DCQP	29/ 29	6.5e+06	4.23		DALLASM	23/ 22	-4.8e+04	0.03	
AUG2DQP	31/ 31	6.2e+06	1.71		DALLASS	30/ 28	-3.2e+04	0.02	

# Annexe C. Résultats numériques de IPOPT

Problème	#f/ #g	f	CPU	e	Problème	#f/ #g	f	CPU	e
DECONVC	94/ 83	2.6e−03	0.13		HANGING	34/ 33	−3.1e+04	0.84	
DEGENLPA	27/ 25	3.1e+00	0.01		HATFLDH	19/ 19	−2.5e+01	0.01	
DEGENLPB	41/ 32	−3.1e+01	0.02		HELSEBY	41/ 39	3.1e+01	0.27	
DEGENQPC	16/ 16	9.2e−05	0.62		HET-Z	13/ 13	1.0e+00	0.03	
DEGENQP	13/ 13	1.1e−04	4.46		HIE1372D	55/ 40	8.1e+05	0.30	
DEGTRIDL	15/ 15	5.0e−01	2.87		HIMMELBI	26/ 26	−1.7e+03	0.02	
DEMOB7	48/ 40	1.7e+02	0.02		HIMMELBJ	666/ 51	−1.9e+03	0.13	7
DEMYMALO	12/ 12	−3.0e+00	0.01		HIMMELBK	19/ 19	5.2e−02	0.01	
DIPIGRI	22/ 12	6.8e+02	0.01		HIMMELP2	19/ 19	−8.2e+00	0.01	
DISC2	90/ 31	1.6e+00	0.02		HIMMELP3	13/ 13	−5.9e+01	0.01	
DISCS	201/ 96	1.4e+01	0.19	5	HIMMELP4	25/ 25	−5.9e+01	0.01	
DITCERT	38/ 38	−2.0e+00	18.43		HIMMELP5	195/ 56	−5.9e+01	0.03	
DIXCHLNV	47/ 46	0.0e+00	16.40		HIMMELP6	31/ 24	−5.9e+01	0.01	
DNIEPER	31/ 31	1.9e+04	0.02		HONG	10/ 10	2.3e+01	0.01	
DRUGDISE	350/ 190	4.0e+02	0.78	3	HUBFIT	9/ 9	1.7e−02	0.01	
DRUGDIS	114/ 111	4.3e+00	2.28		HUES-MOD	32/ 30	3.5e+07	0.30	
DUAL1	17/ 17	3.5e−02	0.04		HUESTIS	28/ 28	1.7e+11	0.23	
DUAL2	14/ 14	3.4e−02	0.04		HVYCRASH	628/ 353	−1.8e−01	19.09	
DUAL3	15/ 15	1.4e−01	0.06		HYDROELL	236/ 236	−3.6e+06	0.91	
DUAL4	14/ 14	7.5e−01	0.03		HYDROELM	342/ 342	−3.1e+06	0.70	
DUALC1	32/ 32	6.2e+03	0.04		HYDROELS	121/ 121	−3.6e+06	0.13	
DUALC2	22/ 22	3.6e+03	0.02		JANNSON3	18/ 18	2.0e+04	1.03	
DUALC5	13/ 13	4.3e+02	0.01		JANNSON4	14/ 14	9.8e+03	0.36	
DUALC8	17/ 17	1.8e+04	0.03		JJTABEL3	1868/ 1012	1.3e+14	14.67	
EG3	132/ 127	6.8e−02	32.45		KISSING2	182/ 94	6.6e+00	0.88	
EIGENA	39/ 5	0.0e+00	376.53		KISSING	372/ 333	8.5e−01	5.43	
EIGMAXA	28/ 9	−1.0e+00	0.02		KIWCRESC	11/ 10	−5.0e−09	0.01	
EIGMAXB	9/ 9	−9.7e−04	0.01		KSIP	32/ 28	5.8e−01	0.23	
EIGMINA	28/ 9	1.0e+00	0.02		LAKES	20/ 16	3.5e+05	0.01	
EIGMINB	9/ 9	9.7e−04	0.01		LAUNCH	25/ 23	9.0e+00	0.02	
ELATTAR	197/ 97	7.4e+01	0.32		LEAKNET	20/ 19	8.0e+00	0.02	
EQC	11/ 9	−8.3e+02	0.01		LEUVEN1	95/ 95	−1.5e+07	2.00	
ERRINBAR	66/ 42	2.8e+01	0.03		LEUVEN2	195/ 194	−1.4e+07	4.33	
EXPFITA	39/ 36	1.1e−03	0.02		LEUVEN3	2109/ 1906	−2.0e+09	1712.91	
EXPFITB	112/ 55	5.0e−03	0.04		LEUVEN4	4046/ 2241	−6.7e+08	2240.56	1
EXPFITC	629/ 167	2.3e−02	0.94		LEUVEN5	2109/ 1906	−2.0e+09	1713.05	
EXTRASIM	6/ 6	1.0e+00	0.01		LEUVEN6	1599/ 1329	−1.2e+09	1279.10	
FCCU	9/ 9	1.1e+01	0.01		LEUVEN7	33/ 33	6.9e+02	0.66	
FEEDLOC	66/ 52	−6.2e−11	0.08		LIN	9/ 9	−1.8e−02	0.01	
FLETCHER	28/ 25	2.0e+01	0.01		LINSPANH	14/ 14	−7.7e+01	0.01	
GASOIL	37/ 15	5.2e−03	0.58		LIPPERT1	−/ −	−	−	2
GAUSSELM	392/ 391	−1.1e+01	2.31		LIPPERT2	3176/ 43	2.9e+03	1140.88	1
GIGOMEZ1	19/ 16	−3.0e+00	0.01		LISWET10	33/ 33	9.8e+00	0.20	
GIGOMEZ2	9/ 9	2.0e+00	0.01		LISWET11	49/ 49	9.9e+00	0.30	
GIGOMEZ3	9/ 9	2.0e+00	0.01		LISWET12	35/ 33	3.5e+02	0.21	
GILBERT	24/ 24	2.5e+03	0.20		LISWET1	20/ 20	7.1e+00	0.13	
GLIDER	77/ 68	−1.2e+03	1.65		LISWET2	29/ 29	5.0e+00	0.18	
GMNCASE1	13/ 13	2.7e−01	0.24		LISWET3	32/ 32	5.0e+00	0.20	
GMNCASE2	13/ 13	−9.9e−01	0.27		LISWET4	33/ 33	5.0e+00	0.21	
GMNCASE3	12/ 12	1.5e+00	0.26		LISWET5	32/ 32	5.0e+00	0.21	
GMNCASE4	57/ 49	5.9e+03	1.83		LISWET6	37/ 33	5.0e+00	0.21	
GOFFIN	8/ 8	1.2e−07	0.01		LISWET7	17/ 17	9.9e+01	0.11	
GOULDQP1	39/ 31	−3.5e+03	0.02		LISWET8	38/ 36	1.4e+02	0.23	
GOULDQP2	3/ 3	1.7e−12	0.15		LISWET9	31/ 31	3.9e+02	0.20	
GOULDQP3	6/ 6	3.3e−05	0.53		LOADBAL	19/ 16	4.5e−01	0.01	
GPP	34/ 34	2.3e+05	87.52		LOOTSMA	17/ 13	1.4e+00	0.01	
GRIDNETA	21/ 21	4.8e+02	0.22		LOTSCHD	15/ 15	2.4e+03	0.01	
GRIDNETC	28/ 28	1.6e+02	0.55		LSNNOLOC	16/ 15	1.2e+02	0.01	
GRIDNETD	22/ 22	5.7e+02	0.51		LSQFIT	8/ 8	3.4e−02	0.01	
GRIDNETF	28/ 28	2.4e+02	1.76		LUKVLI10	101/ 78	3.5e+03	4.88	
GRIDNETG	18/ 18	6.2e+02	0.54		LUKVLI11	26/ 26	5.6e−06	0.88	
GRIDNETI	28/ 28	2.4e+02	1.93		LUKVLI12	192/ 192	5.1e−08	10.05	
HADAMARD	1422/ 1333	1.1e+00	169.80		LUKVLI13	37/ 37	1.3e+02	1.18	
HAGER4	12/ 12	2.8e+00	0.09		LUKVLI14	35/ 35	1.6e+04	0.90	
HAIFAL	125/ 118	−1.3e+01	8.76		LUKVLI15	170/ 152	7.1e−06	5.76	
HAIFAM	36/ 36	−4.5e+01	0.13		LUKVLI16	41/ 41	3.0e+03	1.33	
HAIFAS	10/ 9	−4.5e−01	0.01		LUKVLI17	51/ 51	7.8e+02	1.57	
HALDMADS	288/ 120	2.4e+00	0.08		LUKVLI18	28/ 28	5.9e−06	0.72	

# Annexe C. Résultats numériques de IPOPT

Problème	#f/ #g	f	CPU	e	Problème	#f/ #g	f	CPU	e
LUKVL11	4048/ 3001	7.7e+03	178.46	1	OET7	128/ 116	4.5e−05	0.94	
LUKVL13	23/ 23	1.2e+01	0.43		OPTCDEG2	36/ 36	2.3e+02	0.35	
LUKVL14	42/ 30	−3.8e+06	1.97	7	OPTCDEG3	31/ 31	4.6e+01	0.28	
LUKVL15	38/ 38	4.9e−01	2.25		OPTCNTRL	40/ 31	5.5e+02	0.02	
LUKVL16	22/ 22	6.3e+05	1.52		OPTMASS	33/ 33	−1.2e−01	0.40	
LUKVL17	17/ 17	−2.2e+03	0.29		OPTPRLOC	29/ 27	−1.6e+01	0.02	
LUKVL18	35/ 35	1.0e+06	3.22		ORBIT2	107/ 75	3.1e+02	14.17	
LUKVL19	49/ 34	1.0e+03	0.34		ORTHREGE	3192/ 3001	1.2e+03	104.07	1
MADSEN	25/ 21	6.2e−01	0.01		ORTHREGF	126/ 72	7.1e+01	13.60	
MADSSCHJ	60/ 38	−5.0e+03	2.52		OSORIO	20/ 20	1.1e+01	0.46	
MAKELA1	19/ 19	−1.4e+00	0.01		PDE1	−/ −	−	−	2
MAKELA2	8/ 8	7.2e+00	0.01		PDE2	30/ 30	1.1e+03	400.29	
MAKELA3	17/ 17	4.0e−08	0.01		PENTAGON	19/ 17	1.4e−04	0.01	
MAKELA4	8/ 8	9.0e−08	0.01		PFIT1	319/ 17	0.0e+00	0.07	5
MANNE	3003/ 118	1.2e+01	658.22	1	PFIT2	229/ 16	0.0e+00	0.07	5
MARINE	29/ 29	2.0e+07	1.29		PFIT3	746/ 10	0.0e+00	0.23	5
MATRIX2	21/ 21	5.1e−09	0.01		PFIT4	771/ 16	0.0e+00	0.23	5
MCONCON	10/ 10	−6.2e+03	0.01		PINENE	12/ 12	2.0e+01	0.43	
METHANOL	15/ 15	9.0e−03	1.23		POLAK1	7/ 7	2.7e+00	0.01	
MIFFLIN1	7/ 7	−1.0e+00	0.01		POLAK2	19/ 19	5.5e+01	0.01	
MIFFLIN2	16/ 16	−1.0e+00	0.01		POLAK3	4354/ 19	1.2e+04	2.46	1
MINC44	45/ 41	3.8e−04	14.14		POLAK4	15/ 15	−2.5e−09	0.01	
MINMAXBD	56/ 43	1.2e+02	0.02		POLAK5	32/ 32	5.0e+01	0.02	
MINMAXRB	11/ 10	2.4e−11	0.01		POLAK6	1309/ 154	−4.4e+01	0.48	
MINPERM	7/ 7	3.6e−04	4.78		POLYGON	46/ 46	−7.3e−01	3.69	
MISTAKE	15/ 15	−1.0e+00	0.01		PORTFL1	10/ 10	2.0e−02	0.01	
MOSARQP1	19/ 19	−3.8e+03	0.12		PORTFL2	9/ 9	3.0e−02	0.01	
MOSARQP2	15/ 15	−5.1e+03	0.09		PORTFL3	11/ 11	3.3e−02	0.01	
MPC10	66/ 63	−1.5e+07	1.55		PORTFL4	10/ 10	2.6e−02	0.01	
MPC11	78/ 73	−1.5e+07	1.79		PORTFL6	9/ 9	2.6e−02	0.01	
MPC12	67/ 63	−1.5e+07	1.61		PORTSNQP	60/ 60	3.3e+04	35.74	
MPC13	71/ 69	−1.5e+07	1.80		PORTSQP	27/ 24	3.3e+04	3.32	
MPC14	74/ 67	−1.5e+07	1.75		POWELL20	1155/ 1154	6.5e+09	17.22	
MPC15	70/ 66	−1.5e+07	1.65		PRIMAL1	20/ 20	−3.5e−02	0.06	
MPC16	71/ 67	−1.5e+07	1.67		PRIMAL2	18/ 18	−3.4e−02	0.08	
MPC1	459/ 459	−2.3e+07	17.45		PRIMAL3	16/ 16	−1.4e−01	0.21	
MPC2	61/ 61	−1.5e+07	1.48		PRIMAL4	14/ 14	−7.5e−01	0.12	
MPC3	73/ 72	−1.5e+07	1.68		PRIMALC1	18/ 18	−6.2e+03	0.08	
MPC4	60/ 60	−1.5e+07	1.47		PRIMALC2	19/ 19	−3.6e+03	0.02	
MPC5	57/ 57	−1.5e+07	1.38		PRIMALC5	16/ 16	−4.3e+02	0.02	
MPC6	65/ 60	−1.5e+07	1.48		PRIMALC8	28/ 28	−1.8e+04	0.05	
MPC7	63/ 59	−1.5e+07	1.55		PRODPL0	19/ 19	5.9e+01	0.01	
MPC8	66/ 64	−1.5e+07	1.58		PRODPL1	30/ 30	3.6e+01	0.02	
MPC9	65/ 63	−1.5e+07	1.60		PT	21/ 21	1.8e−01	0.02	
MRIBASIS	25/ 21	1.8e+01	0.02		QC	38/ 33	−9.6e+02	0.02	
NASH	80/ 13	5.0e−05	0.03	5	QPBAND	22/ 22	−5.0e+04	4.03	
NCVXQP1	20/ 20	−3.4e+03	0.01		QPCBLEND	24/ 24	−7.8e−03	0.02	
NCVXQP2	16/ 16	−2.7e+03	0.01		QPCBOEI1	141/ 134	1.2e+07	0.34	
NCVXQP3	21/ 21	−2.5e+03	0.01		QPCBOEI2	195/ 31	1.5e+07	0.52	5
NCVXQP4	27/ 27	−5.6e+03	0.01		QPCSTAIR	218/ 189	6.2e+06	0.57	
NCVXQP5	30/ 28	−3.6e+03	0.01		QPNBAND	22/ 22	−2.5e+05	4.08	
NCVXQP6	25/ 25	−3.0e+03	0.01		QPNBLEND	24/ 24	−9.1e−03	0.02	
NCVXQP7	15/ 15	−3.0e+03	0.01		QPNBOEI1	622/ 583	6.8e+06	2.15	
NCVXQP8	18/ 17	−2.4e+03	0.01		QPNBOEI2	206/ 47	4.1e+06	0.68	5
NCVXQP9	21/ 19	−2.3e+03	0.01		QPNSTAIR	247/ 218	5.1e+06	0.69	
NET1	47/ 41	9.4e+05	0.03		QR3D	54/ 11	0.0e+00	2.50	
NET2	105/ 86	1.2e+06	0.11	7	RDW2D52F	13/ 13	8.6e−03	0.05	
NET3	187/ 187	5.9e+06	0.57	6	READING1	25/ 25	−1.6e−01	0.29	
NET4	−/ −	−	−	2	READING2	18/ 18	−1.3e−02	0.31	
NGONE	44/ 44	−6.4e−01	1.02		READING3	24/ 24	−1.5e−01	0.28	
NUFFIELD	−/ −	−	−	2	READING4	416/ 190	−2.9e−01	5.34	
ODFITS	11/ 11	−2.4e+03	0.01		READING5	6/ 6	−2.2e−17	0.13	
OET1	56/ 46	5.4e−01	0.10		READING6	21/ 21	−1.4e+02	0.02	
OET2	118/ 81	8.7e−02	0.25		READING7	128/ 127	−1.2e+03	17.08	
OET3	17/ 17	4.5e−03	0.04		READING8	191/ 191	−2.2e+03	183.80	
OET4	56/ 56	4.3e−03	0.17		READING9	97/ 97	−4.4e−02	3.07	6
OET5	115/ 109	2.7e−03	0.32		RES	20/ 12	0.0e+00	0.01	
OET6	101/ 95	2.1e−03	2.88		RK23	11/ 11	8.3e−02	0.01	

# Annexe C. Résultats numériques de IPOPT

Problème	#f/ #g	f	CPU	e	Problème	#f/ #g	f	CPU	e
ROBOTARM	–/–	–	–	2	TABLE5	1248/ 739	2.9e+09	134.41	
ROBOT	26/ 18	6.6e+00	0.02		TABLE6	1189/ 579	2.8e+12	7.53	
ROCKET	53/ 49	–1.0e+00	0.70		TABLE7	123/ 33	1.4e+05	0.47	5
ROSENMMX	22/ 19	–4.4e+01	0.01		TABLE8	13/ 13	1.9e+02	0.03	
ROTDISC	103/ 77	7.9e+00	0.43		TAME	6/ 6	0.0e+00	0.01	
S268	18/ 18	2.8e–09	0.01		TARGUS	39/ 39	1.7e+07	0.04	
S277-280	14/ 14	5.1e+00	0.01		TENBARS1	33/ 31	2.3e+03	0.02	
SAROMM	29268/ 2947	8.8e+01	260.38	1	TENBARS2	34/ 31	2.3e+03	0.02	
SARO	5649/ 3001	2.5e+02	159.28	1	TENBARS3	17/ 17	2.2e+03	0.01	
SAWPATH	30/ 30	7.5e+02	2.72	3	TENBARS4	18/ 18	3.7e+02	0.01	
SEMICON1	60/ 60	0.0e+00	1.10		TFI1	86/ 48	5.3e+00	0.04	
SEMICON2	20/ 20	0.0e+00	0.35		TFI2	19/ 14	6.5e–01	0.01	
SIMPLIPA	9/ 9	1.0e+00	0.01		TFI3	16/ 16	4.3e+00	0.01	
SIMPLLPB	11/ 11	1.1e+00	0.01		TOYSARAH	3052/ 353	3.4e+19	172.45	1
SINROSNB	239/ 182	3.1e+01	1.02		TRAINF	35/ 35	3.1e+00	0.25	
SIPOW1M	100/ 97	–1.0e+00	0.33		TRAINH	59/ 59	1.2e+01	0.48	
SIPOW1	47/ 41	–1.0e+00	0.15		TRIMLOSS	2/ 2	2.3e+02	0.26	7
SIPOW2M	38/ 31	–1.0e+00	0.10		TRO11X3	873/ 809	1.2e+01	1.95	9
SIPOW2	33/ 32	–1.0e+00	0.10		TRO21X5	3015/ 2995	–5.6e+17	81.90	1
SIPOW3	19/ 16	5.3e–01	0.06		TRO3X3	469/ 412	–1.2e+20	0.26	9
SIPOW4	17/ 14	2.7e–01	0.06		TRO41X9	4381/ 2994	1.2e+03	80.19	1
SMBANK	18/ 18	–7.1e+06	0.02		TRO4X4	548/ 471	–1.0e+20	0.45	9
SMMPSF	421/ 408	1.0e+06	2.36		TRO5X5	353/ 285	–1.4e+20	1.30	9
SNAKE	14/ 13	–2.0e–04	0.01		TRO6X2	525/ 365	–5.6e+08	0.34	5
SOSQP1	8/ 7	–1.8e–11	0.07		TRUSPYR1	15/ 14	1.1e+01	0.01	
SOSQP2	17/ 17	–1.2e+03	0.14		TRUSPYR2	13/ 13	1.1e+01	0.01	
SPIRAL	64/ 64	–5.0e–09	0.03		TRY-B	20/ 20	1.6e–18	0.01	
SREADIN3	25/ 25	–1.5e–01	0.30		TWIRIBG1	75/ 64	–1.0e+00	538.59	
SSEBLIN	147/ 147	1.6e+07	0.11		TWIRIMD1	77/ 67	–1.0e+00	45.39	
SSEBNLN	349/ 194	1.6e+07	0.21		TWIRISM1	42/ 41	–1.0e+00	0.49	
SSNLBEAM	187/ 166	3.4e+02	1.56		TWOBARS	10/ 10	1.5e+00	0.01	
STANCMIN	11/ 11	4.2e+00	0.01		TWOD	–/–	–	–	2
STCQP1	19/ 19	3.7e+05	333.41		UBH1	6/ 6	1.1e+00	0.13	
STCQP2	17/ 17	3.7e+04	9.05		UBH5	6/ 6	1.1e+00	0.09	
STEENBRA	24/ 24	1.7e+04	0.10		VANDERM1	87/ 24	0.0e+00	5.54	
STEENBRB	62/ 62	9.1e+03	0.26		VANDERM2	87/ 24	0.0e+00	5.58	
STEENBRC	170/ 123	2.8e+04	1.11		VANDERM3	110/ 25	0.0e+00	6.94	
STEENBRD	215/ 186	9.0e+03	1.19		WACHBIEG	26/ 10	–1.0e+00	0.01	5
STEENBRE	89/ 88	2.9e+04	0.70		WATER	28/ 28	1.1e+04	0.02	
STEENBRF	61/ 61	9.0e+03	0.25		WOMFLET	12/ 12	6.0e+00	0.01	
STEENBRG	166/ 145	2.7e+04	1.29		YAO	34/ 29	2.0e+02	0.20	
STEERING	21/ 16	5.5e–01	0.15		YORKNET	1153/ 202	1.4e+04	1.49	5
STNQP1	26/ 26	–3.1e+05	576.71		ZAMB2-10	30/ 30	–1.6e+00	0.10	
STNQP2	28/ 28	–5.7e+05	26.72		ZAMB2-11	23/ 23	–1.1e+00	0.08	
SUPERSIM	2/ 2	6.7e–01	0.00		ZAMB2-8	21/ 21	–1.5e–01	0.02	
SVANBERG	32/ 31	8.4e+03	1.71		ZAMB2-9	23/ 23	–3.5e–01	0.02	
SWOPF	17/ 17	6.8e–02	0.02		ZAMB2	41/ 41	–1.1e+01	0.38	
SYNTHESE1	10/ 10	7.6e–01	0.01		ZECEVIC2	9/ 9	–4.1e+00	0.01	
SYNTHESE2	16/ 16	–5.5e–01	0.01		ZECEVIC3	22/ 22	9.7e+01	0.01	
SYNTHESE3	14/ 14	1.5e+01	0.01		ZECEVIC4	10/ 10	7.6e+00	0.01	
TABLE1	228/ 151	2.8e+12	1.24		ZIGZAG	335/ 207	8.6e+01	2.05	
TABLE3	1248/ 739	2.9e+09	106.23		ZY2	10/ 10	2.0e+00	0.01	
TABLE4	1248/ 739	2.9e+09	106.21						

TABLE C.5 – Résultats de IPOPT sur des problèmes dégénérés des collections COPS et CUTEr

Problème	#f/ #g	f	CPU	e	Problème	#f/ #g	f	CPU	e
aug3d	62/ 21	5.5e+02	1.47		hs052	21/ 16	5.3e+00	0.02	
aug3dc	24/ 18	7.7e+02	0.38		hs061	21/ 21	-1.4e+02	0.02	
bt01	20/ 16	-1.0e+00	0.02		hs077	25/ 22	2.4e-01	0.02	
bt02	24/ 21	3.3e-02	0.02		hs078	19/ 16	-2.9e+00	0.02	
bt03	19/ 14	4.1e+00	0.02		hs079	20/ 17	7.9e-02	0.02	
bt04	21/ 20	-4.6e+01	0.02		hs100lnp	19/ 18	6.8e+02	0.02	
bt05	9/ 9	9.6e+02	0.01		lukvle01	22/ 20	6.2e+00	0.13	
bt06	23/ 20	2.8e-01	0.02		lukvle02	28/ 24	2.8e+04	0.20	
bt07	31/ 21	3.1e+02	0.03		lukvle03	24/ 22	1.4e+01	0.07	
bt08	53/ 51	1.0e+00	0.06		lukvle04	21/ 21	4.8e+03	0.12	
bt09	49/ 26	-1.0e+00	0.03		lukvle05	41/ 34	2.8e+00	0.28	
bt11	25/ 22	8.2e-01	0.02		lukvle06	23/ 23	6.3e+04	0.23	
bt12	21/ 18	6.2e+00	0.02		lukvle07	21/ 21	-1.1e+03	0.06	
byrdsphr	21/ 20	-4.7e+00	0.02		lukvle08	21/ 21	-9.8e+04	0.14	
catena	1146/ 172	-2.1e+06	375.58		lukvle09	39/ 25	1.0e+02	0.06	
chain1	25/ 22	5.1e+00	0.12		lukvle10	25/ 22	3.5e+02	0.13	
chain2	25/ 22	5.1e+00	0.21		lukvle11	27/ 22	7.2e-29	0.09	
chain3	8190/ 1406	5.1e+00	372.63		lukvle12	27/ 23	1.5e+03	0.16	
dixchlng	19/ 19	2.5e+03	0.03		lukvle13	47/ 30	3.1e+03	0.25	
dtoc1na	18/ 17	1.3e+01	0.53		lukvle14	42/ 32	5.2e+03	0.15	
dtoc1nb	18/ 18	1.6e+01	0.54		lukvle15	7507/ 2391	2.7e+01	18.25	
dtoc1nc	19/ 19	2.5e+01	0.57		lukvle16	19/ 17	3.5e+01	0.07	
dtoc1nd	58/ 40	1.3e+01	0.82		lukvle17	27/ 24	1.0e+03	0.11	
dtoc2	17/ 14	4.7e-01	0.32		lukvle18	25/ 22	1.0e+03	0.08	
dtoc5	21/ 18	1.5e+00	0.53		maratos	23/ 19	-1.0e+00	0.02	
dtoc6	21/ 21	1.3e+05	0.61		mwright	21/ 21	2.5e+01	0.02	
eigena2	21/ 17	1.4e-29	0.06		orthrdm2	26/ 22	1.6e+02	0.44	
eigenaco	14/ 11	0.0e+00	0.04		orthrega	102/ 73	1.4e+03	0.74	
eigenb2	92/ 43	1.9e-21	0.23		orthregb	43/ 15	6.6e-31	0.03	
eigenbco	61/ 52	4.6e-23	0.57		orthregc	30/ 23	1.9e+02	7.86	
eigenc2	314/ 124	1.9e-12	37.60	6	orthregd	29/ 25	1.5e+03	1.44	
eigencco	55/ 46	9.4e-22	0.08		orthrgdm	586/ 177	2.5e+03	36.82	7
elec1	171/ 113	1.1e+03	3.29		orthrgds	1563/ 232	1.5e+03	24.62	7
elec2	162/ 121	4.4e+03	21.54		robot	23/ 18	9.3e+01	0.02	
elec3	184/ 119	1.8e+04	152.87		s216	22/ 19	1.0e+00	0.02	
gilbert	31/ 27	4.8e+02	0.11		s219	75/ 32	-1.0e+00	0.04	
gridnetb	5/ 5	1.4e+02	0.39		s235	60/ 18	4.0e-02	0.03	
hager1	7/ 7	8.8e-01	0.13		s269	26/ 17	4.1e+00	0.02	
hager2	7/ 7	4.3e-01	14.03		s316	25/ 23	3.3e+02	0.03	
hager3	7/ 7	1.4e-01	0.28		s317	25/ 23	3.7e+02	0.03	
hs006	24/ 22	2.0e-17	0.03		s318	25/ 23	4.1e+02	0.03	
hs007	29/ 24	-1.7e+00	0.03		s319	24/ 23	4.5e+02	0.03	
hs009	17/ 15	-5.0e-01	0.02		s320	22/ 22	4.9e+02	0.02	
hs026	50/ 31	2.7e-15	0.04		s321	22/ 22	5.0e+02	0.02	
hs027	31/ 25	4.0e-02	0.03		s322	24/ 23	5.0e+02	0.03	
hs028	11/ 9	1.2e-22	0.01		s335	62/ 33	-4.5e-03	0.04	
hs039	49/ 26	-1.0e+00	0.03		s336	22/ 22	-3.4e-01	0.03	
hs040	18/ 16	-2.5e-01	0.02		s338	110/ 48	-7.2e+00	0.07	
hs046	32/ 30	7.4e-16	0.03		s344	21/ 19	3.3e-02	0.02	
hs047	22/ 20	-2.7e-02	0.02		s345	27/ 20	3.3e-02	0.02	
hs048	5/ 5	3.6e-30	0.01		s375	23/ 22	-1.5e+01	0.03	
hs049	39/ 28	2.3e-12	0.03		s378	46/ 39	-4.8e+01	0.05	
hs050	23/ 20	5.1e-22	0.02		s394	20/ 20	1.9e+00	0.02	
hs051	5/ 5	1.5e-16	0.01		s395	22/ 22	1.9e+00	0.04	

# Annexe C. Résultats numériques de IPOPT

TABLE C.6 – Résultats de IPOPT sur des problèmes de la collection MacMPEC

Problème	#f/ #g	f	CPU	e	Problème	#f/ #g	f	CPU	e
bar-truss-3	66/ 61	1.0e−04	0.08		gauvin	23/ 23	2.5e−09	0.03	
bard1	13/ 13	2.0e+00	0.01		hs044-i	28/ 28	6.3e−06	0.03	
bard1m	14/ 14	2.0e+00	0.02		incid-set1-8	18/ 18	−3.7e−07	0.08	
bard2	21/ 21	−6.6e+03	0.02		incid-set1c-8	21/ 21	−2.9e−07	0.08	
bard2m	21/ 21	−6.6e+03	0.02		incid-set2-8	33/ 27	4.5e−03	0.11	
bard3	23/ 23	−1.3e+01	0.03		incid-set2c-8	23/ 23	5.5e−03	0.08	
bard3m	15/ 15	−1.6e+01	0.02		jr1	8/ 8	5.0e−01	0.01	
bilevel1	14/ 14	−3.0e+01	0.02		jr2	8/ 8	7.9e−18	0.01	
bilevel2	24/ 24	−6.6e+03	0.03		kth1	5/ 5	−1.5e−08	0.01	
bilevel3	15/ 15	−1.6e+01	0.02		kth2	8/ 8	−7.5e−09	0.01	
bilin	13/ 13	−5.8e+01	0.02		kth3	5/ 5	4.7e−18	0.01	
dempe	44/ 44	1.6e+01	0.05		nash1	12/ 12	1.5e−19	0.01	
design-cent-1	188/ 69	−4.4e+03	0.18	5	nash1a	12/ 12	1.5e−19	0.01	
design-cent-2	242/ 150	−1.2e+21	0.22	9	outrata31	13/ 13	2.6e+00	0.01	
design-cent-4	9/ 9	−4.0e+00	0.01		outrata32	14/ 14	2.6e+00	0.02	
design-init-1	5/ 5	−2.5e−09	0.01		outrata33	11/ 11	2.7e+00	0.01	
design-init-2	5/ 5	−2.5e−09	0.01		outrata34	13/ 13	2.6e+00	0.01	
design-init-3	5/ 5	−2.5e−09	0.01		pack-comp1-8	50/ 34	6.0e−01	0.11	
design-init-4	5/ 5	−7.5e−09	0.01		pack-comp1c-8	49/ 35	6.0e−01	0.12	
desilva	19/ 19	−1.0e+00	0.02		pack-comp2c-8	44/ 33	6.7e−01	0.11	
df1	16/ 16	4.2e−09	0.02		pack-rig1-8	19/ 19	7.9e−01	0.05	
ex9.1.1	11/ 11	−1.3e+01	0.01		pack-rig1c-8	21/ 21	7.9e−01	0.05	
ex9.1.10	22/ 22	−3.3e+00	0.03		pack-rig1p-8	21/ 21	7.9e−01	0.06	
ex9.1.2	8/ 8	−6.3e+00	0.01		pack-rig2-8	21/ 21	7.8e−01	0.05	
ex9.1.3	16/ 16	−5.8e+01	0.02		pack-rig2c-8	25/ 25	8.0e−01	0.06	
ex9.1.4	10/ 10	−3.7e+01	0.01		pack-rig2p-8	25/ 25	7.8e−01	0.07	
ex9.1.5	14/ 12	−1.0e+00	0.01		portfl-i-1	24/ 24	3.1e−07	0.04	
ex9.1.6	19/ 15	−5.2e+01	0.02		qpec1	7/ 7	8.0e+01	0.01	
ex9.1.7	16/ 16	−5.0e+01	0.02		qpec2	7/ 7	6.7e−17	0.01	
ex9.1.8	22/ 22	−3.3e+00	0.03		ralphmod	37/ 37	−6.8e+02	0.89	6
ex9.1.9	23/ 23	2.0e+00	0.03		scholtes1	8/ 8	2.0e+00	0.01	
ex9.2.1	17/ 14	2.0e+00	0.02		scholtes2	11/ 11	1.5e+01	0.01	
ex9.2.2	12/ 12	5.0e+01	0.01		scholtes3	7/ 7	6.3e−18	0.01	
ex9.2.3	10/ 10	5.0e+00	0.01		scholtes5	6/ 6	1.0e+00	0.01	
ex9.2.4	11/ 11	1.8e−18	0.01		sl1	25/ 23	1.0e−04	0.03	
ex9.2.5	13/ 13	1.8e−20	0.02		stackelberg1	10/ 10	−3.3e+03	0.01	
ex9.2.6	11/ 11	−1.5e+00	0.01		tap-09	19/ 19	1.1e+02	0.03	
ex9.2.7	17/ 14	2.0e+00	0.02		tap-15	24/ 24	1.8e+02	0.06	
ex9.2.8	13/ 11	1.0e+00	0.01		water-net	116/ 110	9.3e+02	0.19	
ex9.2.9	14/ 14	2.0e+00	0.02						



## Annexe D

# Résultats numériques de ALGENCAN

Nous présentons dans cette annexe les résultats numériques obtenus avec ALGENCAN sur l'ensemble des problèmes donnés dans les tableaux [A.1-A.4](#). Le tableau [D.2](#) énumère les résultats de ALGENCAN utilisés dans les comparaisons du chapitre [3](#). Les tableaux [D.3-D.6](#) énumèrent les résultats de ALGENCAN utilisés dans l'étude numérique du chapitre [4](#). Pour chaque problème, nous donnons les nombres suivants : nombre d'évaluations de fonctions ( $\#f$ ) et de gradients ( $\#g$ ), valeur finale de la fonction objectif ( $f$ ), temps CPU en secondes (CPU). Un nombre positif dans la colonne (e) indique un échec. Le tableau [D.1](#) donne les différents types d'erreurs retournées par ALGENCAN.

e	Message d'erreur
1	Nombre maximum d'itérations atteint
2	Temps CPU maximum dépassé
3	Paramètre de pénalisation trop grand
4	Erreur pendant le calcul d'une direction
5	Erreur lors de l'évaluation des fonctions
6	Erreur inconnue

TABLE D.1 – Les messages d'erreur retournés par ALGENCAN



TABLE D.2 – Résultats de ALGENCAN sur des problèmes d'égalité de CUTer et COPS

Problème	Problèmes standards				Problèmes dégénérés			
	#f/#g	f	CPU	e	#f/#g	f	CPU	e
aug2d	5/5	1.7e+06	0.31		60/34	1.7e+06	1.89	
aug3d	5/5	5.5e+02	0.07		24/25	5.5e+02	0.30	
aug3dc	5/5	7.7e+02	0.06		26/27	7.7e+02	0.20	
bt01	36/25	-1.0e+00	0.00		60/48	-1.0e+00	0.00	
bt02	33/34	3.3e-02	0.00		233/245	3.3e-02	0.02	
bt03	5/5	4.1e+00	0.00		47/49	4.1e+00	0.00	
bt04	39/34	-4.6e+01	0.00		84/69	-4.6e+01	0.01	
bt05	35/31	9.6e+02	0.00		59/51	9.6e+02	0.01	
bt06	35/32	2.8e-01	0.00		59/49	2.8e-01	0.01	
bt07	42/35	3.6e+02	0.00		98/79	3.6e+02	0.01	
bt08	33/27	1.0e+00	0.01		40/32	1.0e+00	0.00	
bt09	30/31	-1.0e+00	0.00		95/99	-1.0e+00	0.01	
bt11	11/11	8.2e-01	0.00		58/59	8.2e-01	0.01	
bt12	7/7	6.2e+00	0.00		40/42	6.2e+00	0.00	
byrdsphr	33/32	-4.7e+00	0.00		72/75	-4.7e+00	0.01	
catena	329/138	-2.1e+06	168.06		311/128	-2.1e+06	168.23	
chain1	5616/2527	5.1e+00	16.79		5047/2644	5.1e+00	9.50	
chain2	5602/2117	5.1e+00	91.04		5325/2372	5.1e+00	51.53	
chain3	8054/3080	5.1e+00	428.90		6327/2823	5.1e+00	293.14	
dixchlng	13/13	2.5e+03	0.00		79/68	2.5e+03	0.01	
dtoc1na	9/9	1.3e+01	0.19		9/9	1.3e+01	0.20	
dtoc1nb	9/9	1.6e+01	0.20		9/9	1.6e+01	0.21	
dtoc1nc	86/62	2.5e+01	1.26		112/71	2.5e+01	1.48	
dtoc1nd	214/95	1.3e+01	1.30		245/103	1.2e+01	1.29	
dtoc2	28/28	5.1e-01	0.52		61/63	5.1e-01	1.18	
dtoc5	7/7	1.5e+00	0.16		25/26	1.5e+00	0.39	
dtoc6	63/62	1.3e+05	1.04		96/100	1.3e+05	1.98	
eigena2	6/6	2.2e-29	0.00		6/6	2.2e-29	0.00	
eigenaco	22/23	3.2e-30	0.02		22/23	3.2e-30	0.02	
eigenb2	191/150	1.1e-21	0.28		149/126	3.1e-23	0.23	
eigenbco	195/147	5.8e-19	0.38		182/136	1.7e-16	0.38	
eigenc2	94/73	1.3e-28	3.35		107/89	1.7e-26	3.97	
eigencco	42/34	1.2e-27	0.01		82/71	5.7e-23	0.02	
elec1	125/90	1.1e+03	0.58		133/96	1.1e+03	0.61	
elec2	194/138	4.4e+03	4.53		149/109	4.4e+03	3.74	
elec3	422/230	1.8e+04	79.76		430/239	1.8e+04	66.09	
gilbert	54/56	4.8e+02	0.42		264/281	4.8e+02	83.67	
gridnetb	5/5	1.4e+02	0.20		36/38	1.4e+02	0.89	
hager1	39/48	8.8e-01	197.47		88/93	8.8e-01	3.59	
hager2	70/64	4.3e-01	152.03		92/110	4.3e-01	42.39	
hager3	503/166	1.4e-01	443.78		96/114	1.4e-01	194.84	
hs006	6/6	1.3e-29	0.00		91/85	0.0e+00	0.01	
hs007	28/29	-1.7e+00	0.00		111/118	-1.7e+00	0.01	
hs009	19/19	-5.0e-01	0.00		21/22	-5.0e-01	0.00	
hs026	83/71	1.8e-15	0.01		127/99	1.5e-16	0.01	
hs027	28/29	4.0e-02	0.00		46/42	4.0e-02	0.01	
hs028	5/5	1.1e-30	0.00		5/5	1.1e-30	0.00	
hs039	30/31	-1.0e+00	0.00		95/99	-1.0e+00	0.01	
hs040	7/7	-2.5e-01	0.00		26/27	-2.5e-01	0.00	
hs046	67/58	2.5e-15	0.01		89/75	1.1e-15	0.01	
hs047	95/82	-2.7e-02	0.01		98/92	-2.7e-02	0.01	
hs048	5/5	1.2e-32	0.00		5/5	0.0e+00	0.00	
hs049	37/38	2.1e-12	0.00		37/38	2.1e-12	0.00	
hs050	12/12	3.3e-29	0.00		12/12	3.3e-29	0.00	
hs051	5/5	0.0e+00	0.00		5/5	0.0e+00	0.00	
hs052	5/5	5.3e+00	0.00		44/46	5.3e+00	0.00	
hs061	13/13	-1.4e+02	0.00		43/43	-1.4e+02	0.00	
hs077	40/35	2.4e-01	0.00		53/47	2.4e-01	0.01	
hs078	7/7	-2.9e+00	0.00		27/28	-2.9e+00	0.00	
hs079	7/7	7.9e-02	0.00		50/46	7.9e-02	0.01	
hs100lnp	45/36	6.8e+02	0.00		87/68	6.8e+02	0.01	
lukvle01	9/9	6.2e+00	0.05		44/45	6.2e+00	0.21	
lukvle02	11/11	2.8e+04	0.08		46/47	2.8e+04	0.30	
lukvle03	13/13	1.4e+01	0.02		51/53	1.4e+01	0.07	
lukvle04	32/33	4.8e+03	0.11		51/49	1.0e+03	0.19	

# Annexe D. Résultats numériques de ALGENCAN

Problème	Problèmes standards				Problèmes dégénérés			
	#f/#g	f	CPU	e	#f/#g	f	CPU	e
lukvle05	79/71	4.1e+00	0.32		114/114	4.1e+00	1.64	
lukvle06	34/33	6.3e+04	4.67		150/103	6.3e+04	5.15	
lukvle07	242/125	-1.1e+03	0.14		364/187	-1.1e+03	0.21	
lukvle08	426/269	-9.8e+04	1.56		375/266	-9.8e+04	1.55	
lukvle09	377/207	1.0e+02	0.17		227/120	1.0e+02	0.11	
lukvle10	34/33	3.5e+02	0.10		63/54	3.5e+02	0.20	
lukvle11	12/12	1.4e-30	0.03		46/44	8.6e-02	0.09	
lukvle12	8/8	1.5e+03	0.02		53/55	1.5e+03	0.16	
lukvle13	91/79	3.1e+03	0.22		203/175	3.1e+03	0.47	
lukvle14	152/100	5.2e+03	0.21		120/114	5.2e+03	0.24	
lukvle15	78/69	2.0e-19	0.16		340/271	5.5e-23	0.68	
lukvle16	30/31	3.5e+01	0.06		24/25	3.5e+01	0.05	
lukvle17	32/33	1.0e+03	0.06		46/48	1.0e+03	0.08	
lukvle18	22/23	1.0e+03	0.04		37/39	1.0e+03	0.07	
maratos	24/25	-1.0e+00	0.00		24/20	-1.0e+00	0.00	
mwright	11/11	2.5e+01	0.00		45/42	2.5e+01	0.00	
orthrdm2	34/30	1.6e+02	0.57		155/164	1.6e+02	138.46	
orthrega	153/131	1.4e+03	10.21		231/219	1.4e+03	11.03	
orthregb	5/5	0.0e+00	0.00		71/56	1.6e-20	0.01	
orthregc	154/120	1.9e+02	81.97		265/134	1.9e+02	96.71	
orthregd	1128/694	1.6e+03	400.52		782/615	1.6e+03	250.32	
orthrgdm	141/124	1.5e+03	53.14		202/123	1.5e+03	67.01	
orthrgds	187/111	1.5e+03	59.44		231/131	1.5e+03	81.81	
robot	53/43	5.5e+00	0.00		91/74	5.5e+00	0.01	
s216	10/10	1.0e+00	0.00		82/78	1.0e+00	0.01	
s219	36/36	-1.0e+00	0.00		307/306	-1.0e+00	0.03	
s235	41/35	4.0e-02	0.00		55/51	4.0e-02	0.01	
s269	5/5	4.1e+00	0.00		30/31	4.1e+00	0.00	
s316	33/27	3.3e+02	0.00		35/28	3.3e+02	0.00	
s317	31/27	3.7e+02	0.00		32/28	3.7e+02	0.00	
s318	32/29	4.1e+02	0.00		35/29	4.1e+02	0.00	
s319	40/32	4.5e+02	0.00		41/33	4.5e+02	0.00	
s320	44/33	4.9e+02	0.00		41/34	4.9e+02	0.00	
s321	43/33	5.0e+02	0.01		42/35	5.0e+02	0.00	
s322	47/32	5.0e+02	0.00		48/34	5.0e+02	0.00	
s335	54/56	-4.5e-03	0.00		233/247	-4.5e-03	0.02	
s336	32/31	-3.4e-01	0.00		65/66	-3.4e-01	0.01	
s338	36/27	-1.1e+01	0.00		52/49	-1.1e+01	0.00	
s344	10/10	3.3e-02	0.00		61/57	3.3e-02	0.01	
s345	36/31	3.3e-02	0.00		61/53	3.3e-02	0.00	
s375	42/36	-1.5e+01	0.00		48/44	-1.6e+01	0.01	
s378	48/38	-4.8e+01	0.01		80/69	-4.8e+01	0.01	
s394	31/32	1.9e+00	0.00		126/118	1.9e+00	0.01	
s395	32/33	1.9e+00	0.01		117/108	1.9e+00	0.04	

TABLE D.3 – Résultats de ALGENCAN sur des problèmes de la collection Hock et Schittkowski

Problème	#f/ #g	f	CPU	e	Problème	#f/ #g	f	CPU	e
hs010	31/32	-1.0e+00	0.00		hs100	193/93	6.8e+02	0.01	
hs011	9/9	-8.5e+00	0.00		hs100mod	693/286	6.8e+02	0.01	
hs012	53/37	-3.0e+01	0.00		hs101	604/315	1.8e+03	0.02	
hs013	340/367	2.5e-01	0.02		hs102	2674/1017	9.1e+02	0.07	
hs014	8/8	1.4e+00	0.00		hs103	1694/730	5.4e+02	0.05	
hs015	21/22	3.1e+02	0.00		hs104	20365/1904	4.2e+00	0.21	3
hs016	19/18	2.3e+01	0.00		hs106	100962/33667	4.4e+03	1.62	3
hs017	38/29	1.0e+00	0.00		hs107	62/56	5.1e+03	0.00	
hs018	39/32	5.0e+00	0.00		hs108	32/27	-8.7e-01	0.00	
hs019	57/55	-7.0e+03	0.00		hs109	109/102	5.3e+03	0.01	
hs020	28/28	4.0e+01	0.00		hs111	50/38	-4.8e+01	0.01	
hs021	7/7	-1.0e+02	0.00		hs112	35/28	-4.8e+01	0.00	
hs022	8/8	1.0e+00	0.00		hs113	1967/818	2.4e+01	0.05	
hs023	42/38	2.0e+00	0.00		hs114	653/375	-1.8e+03	0.02	
hs024	55/31	-1.0e+00	0.00		hs116	331711/108070	1.8e+02	7.21	1
hs029	55/34	-2.3e+01	0.00		hs117	28060/10591	3.2e+01	0.57	
hs030	23/24	1.0e+00	0.00		hs118	1054/451	6.6e+02	0.05	
hs031	30/26	6.0e+00	0.00		hs119	77/57	2.4e+02	0.01	
hs032	9/9	1.0e+00	0.00		hs21mod	7/7	-9.6e+01	0.00	
hs033	38/29	-4.0e+00	0.00		hs268	27/20	1.3e-11	0.00	
hs034	41/28	-8.3e-01	0.00		hs35mod	13/13	2.5e-01	0.00	
hs035	10/10	1.1e-01	0.00		hs44new	36/31	-1.5e+01	0.00	
hs036	53/31	-3.3e+03	0.00		hs99exp	178/151	-1.0e+09	0.19	
hs037	56/34	-3.5e+03	0.00		s215	6/6	7.3e-09	0.00	
hs041	17/18	1.9e+00	0.00		s217	11/11	-8.0e-01	0.00	
hs042	8/8	1.4e+01	0.00		s218	59/38	0.0e+00	0.00	
hs043	34/30	-4.4e+01	0.00		s220	1/1	1.0e+00	0.00	
hs044	33/19	-1.5e+01	0.00		s221	479/498	-1.0e+00	0.02	
hs053	7/7	4.1e+00	0.00		s222	26/27	-1.5e+00	0.00	
hs054	8/8	1.9e-01	0.00		s223	5/5	-1.0e+01	0.00	
hs055	23/21	6.7e+00	0.00		s224	34/29	-3.0e+02	0.00	
hs056	30/27	-3.5e+00	0.00		s225	41/37	2.0e+00	0.00	
hs057	56/45	2.8e-02	0.00		s226	40/27	-5.0e-01	0.00	
hs059	46/30	-6.7e+00	0.00		s227	35/31	1.0e+00	0.00	
hs060	10/10	3.3e-02	0.00		s228	22/18	-3.0e+00	0.00	
hs062	20/19	-2.6e+04	0.00		s230	34/27	3.8e-01	0.00	
hs063	215/170	9.6e+02	0.01		s231	10/10	6.2e-30	0.00	
hs064	37/38	6.3e+03	0.00		s232	42/28	-1.0e+00	0.00	
hs065	119/74	9.5e-01	0.00		s233	11/11	2.8e-17	0.00	
hs066	52/35	5.2e-01	0.00		s234	1/1	-8.0e-01	0.00	
hs067	261/191	-1.2e+03	0.01		s236	10/11	-5.9e+01	0.00	
hs070	60/54	8.9e-03	0.01		s237	47/35	-5.9e+01	0.00	
hs071	24/24	1.7e+01	0.00		s238	47/35	-5.9e+01	0.00	
hs072	124/130	7.3e+02	0.01		s239	917/679	-8.2e+00	0.03	
hs073	208/109	3.0e+01	0.01		s247	6/7	1.1e-21	0.00	
hs074	85/90	5.1e+03	0.01		s248	46/39	-8.0e-01	0.00	
hs075	86/91	5.2e+03	0.01		s249	13/13	1.0e+00	0.00	
hs076	36/30	-4.7e+00	0.00		s250	53/31	-3.3e+03	0.00	
hs080	20/21	5.4e-02	0.00		s251	56/34	-3.5e+03	0.00	
hs081	24/23	5.4e-02	0.00		s252	36/37	4.0e-02	0.00	
hs083	26/24	-3.1e+04	0.00		s253	14/14	6.9e+01	0.00	
hs084	6210/3109	-5.3e+06	0.15		s262	39/31	-1.0e+01	0.00	
hs085	62056/24572	-1.9e+00	2.30		s263	36/36	-1.0e+00	0.00	
hs086	60/48	-3.2e+01	0.00		s264	39/34	-4.4e+01	0.00	
hs087	93/95	8.8e+03	0.01		s265	39/22	9.7e-01	0.00	
hs088	77/77	1.4e+00	0.01		s268	26/19	-2.2e-12	0.00	
hs089	92/88	1.4e+00	0.02		s270	10/10	-7.1e-15	0.00	
hs090	576/350	1.4e+00	0.08		s277	82/85	5.1e+00	0.01	1
hs091	94/87	1.4e+00	0.03		s278	308/228	7.8e+00	0.02	
hs092	125/106	1.4e+00	0.04		s279	307/224	1.1e+01	0.01	
hs093	37/32	1.4e+02	0.00		s280	288/225	1.3e+01	0.02	
hs095	28/25	1.6e-02	0.00		s284	81/45	-1.8e+03	0.01	
hs096	28/25	1.6e-02	0.00		s285	17426/7423	-8.3e+03	0.65	
hs097	75/53	4.1e+00	0.00		s315	43/30	-8.0e-01	0.00	
hs098	51/52	4.1e+00	0.00		s323	27/22	3.8e+00	0.00	
hs099	10/10	-8.3e+08	0.00		s324	39/32	5.0e+00	0.00	

# Annexe D. Résultats numériques de ALGENCAN

Problème	#f/ #g	f	CPU	e	Problème	#f/ #g	f	CPU	e
s325	48/35	3.8e+00	0.00		s365	—/—	—	—	5
s326	41/31	−8.0e+01	0.00		s366	154/140	1.2e+03	0.02	
s327	55/45	2.8e−02	0.00		s367	41/35	−3.7e+01	0.00	
s329	174/95	−7.0e+03	0.01		s369	102/70	7.0e+03	0.01	
s330	10/10	1.6e+00	0.00		s372	10415/3496	1.3e+04	0.22	
s331	7/7	4.3e+00	0.00		s374	115/85	2.3e−01	0.01	
s332	90900/16787	7.2e+01	1.99	1	s376	879/332	−4.4e+03	0.02	
s337	30/26	6.0e+00	0.00		s377	125/128	−8.0e+02	0.01	
s339	58/38	3.4e+00	0.00		s380	477/383	3.2e+00	0.03	
s341	55/34	−2.3e+01	0.00		s381	367/156	1.0e+00	0.01	
s342	12/12	−2.3e+01	0.00		s382	58/38	2.1e+00	0.00	
s343	13/13	0.0e+00	0.00		s383	33/33	7.3e+05	0.00	
s346	13/13	0.0e+00	0.00		s384	33839/13650	−8.3e+03	1.20	
s353	55/37	−4.0e+01	0.00		s385	18862/7609	−8.3e+03	0.61	
s354	45/35	1.1e−01	0.00		s387	65845/25842	−8.2e+03	2.60	
s355	1148/536	7.0e+01	0.03		s388	159078/63310	−5.8e+03	6.35	
s357	—/—	—	—	5	s389	82174/33168	−5.8e+03	3.20	
s359	1517/408	−5.5e+06	0.03		s392	1260/579	−1.1e+06	0.07	
s360	19710/1683	−5.3e+06	0.12		s393	150/101	8.6e−01	0.02	
s361	26/21	−1.5e+04	0.00						

# Annexe D. Résultats numériques de ALGENCAN

TABLE D.4 – Résultats de ALGENCAN sur des problèmes de la collection CUTEst

Problème	#f/#g	f	CPU	e	Problème	#f/#g	f	CPU	e
A0ENDNDL	33/33	0.0e+00	1.22		AUG3DCQP	335/135	6.2e+04	13.25	
A0ENINDL	32/32	0.0e+00	1.18		AUG3DQP	33/28	5.4e+04	1.76	
A0ENSNDL	40/40	0.0e+00	39.73		AVGASA	37/33	-4.6e+00	0.01	
A0ESDNDL	32/32	0.0e+00	1.18		AVGASB	46/45	-4.5e+00	0.01	
A0ESINDL	29/29	0.0e+00	1.05		AVION2	7/7	9.5e+07	0.00	
A0ESSNDL	40/40	0.0e+00	39.94		BATCH	4109/1536	2.6e+05	0.24	
A0NNDNDL	170/90	0.0e+00	35.86		BDRY2	-/-	-	-	2
A0NNDNIL	12628/2862	3.9e-03	0.00		BIGBANK	9/9	-5.2e+03	0.04	
A0NNDNSL	238/149	0.0e+00	17.80		BIGGSC4	96/89	-2.4e+01	0.01	
A0NNSNSL	907/479	0.0e+00	25.57		BLOCKQP1	33/33	5.0e+00	2.34	
A0NSDSIL	61/60	0.0e+00	8.79		BLOCKQP2	86/92	-5.0e+03	1.79	
A0NSDSDS	217/195	5.9e-30	4.52		BLOCKQP3	55/55	5.0e+00	3.58	
A0NSDSSL	-/-	-	-	2	BLOCKQP4	175/113	-2.5e+03	2.01	
A0NSDSSL	153/119	0.0e+00	12.08		BLOCKQP5	55/55	5.0e+00	4.01	
A0NSSSSL	180/107	0.0e+00	15.05		BLOWEYA	-/-	-	-	2
A2ENDNDL	31/31	0.0e+00	1.04		BLOWEYB	-/-	-	-	2
A2ENINDL	34/34	0.0e+00	1.22		BLOWEYC	-/-	-	-	2
A2ENSNDL	53/44	0.0e+00	38.51		BRAINPC0	2429/444	1.5e-03	194.79	
A2ESDNDL	31/31	0.0e+00	1.03		BRAINPC1	1120/224	9.8e-10	33.90	
A2ESINDL	34/34	0.0e+00	1.19		BRAINPC2	-/-	-	-	2
A2ESSNDL	55/43	0.0e+00	38.65		BRAINPC3	2436/443	1.7e-04	342.63	
A2NNDNDL	-/-	-	-	2	BRAINPC4	10/10	3.5e-01	62.60	
A2NNDNIL	6601/2124	9.0e+01	807.46	3	BRAINPC5	1699/414	1.4e-03	267.11	
A2NNDNSL	9711/4674	9.1e-17	0.00		BRAINPC6	12/12	2.7e-01	1.84	
A2NNSNSL	379/272	0.0e+00	18.94		BRAINPC7	2622/443	3.8e-05	257.18	
A2NSDSIL	192/145	0.0e+00	18.15		BRAINPC8	1995/437	1.7e-04	291.70	
A2NSDSDL	6959/1791	3.7e+01	0.00	3	BRAINPC9	1485/510	8.2e-04	344.57	
A2NSDSSL	341/215	0.0e+00	42.42		BRIDGEND	1000/342	5.4e+01	4.63	
A2NSSSSL	198/134	0.0e+00	16.11		BRITGAS	12248/7120	0.0e+00	70.16	
A4X12	62494/25500	-6.7e-01	96.64	3	BT13	78/64	0.0e+00	0.00	
A5ENDNDL	35/35	0.0e+00	1.22		BTS4	14315/1340	6.9e+07	437.91	
A5ENINDL	30/30	0.0e+00	1.01		BURKEHAN	207/207	-4.5e-05	0.01	3
A5ENSNDL	51/44	0.0e+00	38.53		CAMSHAPE	141943/10811	-4.6e+00	443.14	3
A5ESDNDL	45/36	0.0e+00	1.24		CANTILVR	28/28	1.3e+00	0.00	
A5ESINDL	30/30	0.0e+00	0.97		CAR2	881/301	2.7e+00	217.06	
A5ESSNDL	54/44	0.0e+00	40.24		CATMIX	575/327	-4.6e-02	20.19	
A5NNDNDL	7681/3338	1.5e-09	0.00		CB2	46/46	2.0e+00	0.01	
A5NNDNIL	3923/1282	6.3e+01	408.25	3	CB3	27/27	2.0e+00	0.00	
A5NNDNSL	9252/4456	1.8e-19	984.56		CBS	520/114	5.4e+06	3.12	
A5NNSNSL	356/263	1.7e-27	16.84		CHACONN1	38/38	2.0e+00	0.01	
A5NSDSDL	257/213	0.0e+00	12.23		CHACONN2	9/9	2.0e+00	0.00	
A5NSDSDM	217/195	5.9e-30	3.76		CHANDHEQ	36/36	0.0e+00	0.25	
A5NSDSIL	6344/1628	1.6e+01	675.21	3	CHEMRCTA	1045285/22168	0.0e+00	771.25	3
A5NSDSSL	461/314	0.0e+00	60.93		CHEMRCTB	55078/4127	0.0e+00	82.46	3
A5NSSNSM	217/195	5.9e-30	3.71		CLNLBEAM	25913/5631	3.4e+02	0.00	
A5NSSSSL	519/387	0.0e+00	21.00		CONCON	265/173	-6.2e+03	0.01	
ACOPP118	296/141	1.3e+05	1.54		CONGIGMZ	61/61	2.8e+01	0.01	
ACOPP14	83/57	8.1e+03	0.03		CONT5-QP	-/-	-	-	2
ACOPP300	1384/634	7.2e+05	17.11		CORE1	6986/2826	9.1e+01	0.77	
ACOPP30	278/160	5.8e+02	0.26		CORE2	2943/1309	7.3e+01	1.48	
ACOPP57	236/125	4.2e+04	0.39		CORKSCRW	4526/2262	8.2e+01	34.56	
ACOPR118	19145/12680	1.3e+05	74.98		COSHFUN	-/-	-	-	2
ACOPR14	2459/1715	8.1e+03	0.72		C-RELOAD	2095/901	-1.0e+00	7.86	
ACOPR300	67761/25625	7.2e+05	312.66		CRESC100	5102/3152	5.7e-01	1.42	
ACOPR30	1672/1051	5.8e+02	1.06		CRESC132	295046/135810	6.9e-01	550.25	1
ACOPR57	4449/2823	4.2e+04	5.19		CRESC4	140/108	8.7e-01	0.01	
AGG	388731/123392	2.4e+07	94.99	1	CRESC50	301888/131971	5.9e-01	28.43	1
AIRPORT	83/83	4.8e+04	0.09		CSFI1	374/182	-4.9e+01	0.01	
ALJAZZAF	52/52	3.7e+04	0.04		CSFI2	830/427	5.5e+01	0.03	
ALLINITA	558/465	3.3e+01	0.03		CVXQP1	78/49	3.6e+03	0.02	
ALLINITC	469/460	3.0e+01	0.03		CVXQP2	38/24	1.9e+03	0.01	
ALLINQP	-/-	-	-	2	CVXQP3	104/80	4.3e+03	0.04	
ALSOTAME	180/181	6.7e-03	0.01	3	DALE	59/50	1.8e+04	2.32	
ANTWERP	9906/5918	3.2e+03	1.29	1	DALLASL	733/327	-2.0e+05	3.60	
AUG2DCQP	37/31	6.5e+06	1.29		DALLASM	245/81	-4.8e+04	0.39	
AUG2DQP	82/69	6.2e+06	4.08		DALLASS	160/66	-3.2e+04	0.05	

# Annexe D. Résultats numériques de ALGENCAN

Problème	#f/#g	f	CPU	e	Problème	#f/#g	f	CPU	e
DECONVC	178/139	1.3e-15	0.15		HANGING	4771/372	-3.1e+04	13.85	
DEGENLPA	447/275	3.1e+00	0.03		HATFLDH	35/27	-2.4e+01	0.01	
DEGENLPB	445/275	-3.1e+01	0.02		HELSEBY	1375/472	3.2e+01	3.01	
DEGENQPC	11/12	0.0e+00	0.28		HET-Z	205/173	1.0e+00	12.18	
DEGENQP	445/275	-3.1e+01	0.00		HIE1372D	60/52	8.1e+05	1.92	
DEGTRIDL	13/13	5.0e-01	3.57		HIMMELBI	609/232	-1.7e+03	0.08	
DEMBO7	6821/2591	1.7e+02	0.28		HIMMELBJ	15191/3222	-1.9e+03	1.54	
DEMYMALO	29/27	-3.0e+00	0.00		HIMMELBK	284/160	5.2e-02	0.04	
DIPIGRI	291/136	6.8e+02	0.01		HIMMELP2	28/26	-6.2e+01	0.00	
DISC2	56610/21561	1.6e+00	4.15		HIMMELP3	18/18	-5.9e+01	0.00	
DISCS	39106/18291	2.2e+03	6.27	3	HIMMELP4	18/18	-5.9e+01	0.00	
DITTERT	4155/4143	-2.0e-01	6.97	3	HIMMELP5	134/62	-5.9e+01	0.01	
DIXCHLNV	3545/2058	5.1e-24	342.07		HIMMELP6	147/65	-5.9e+01	0.00	
DNIEPER	216/128	1.9e+04	0.03		HONG	10/10	2.3e+01	0.00	
DRUGDISE	-/-	-	-	2	HUBFIT	32/24	1.7e-02	0.00	
DRUGDIS	-/-	-	-	2	HUES-MOD	13/13	3.5e+07	0.16	
DUAL1	79/44	3.5e-02	0.04		HUESTIS	13/13	1.7e+11	0.14	
DUAL2	28/18	3.4e-02	0.02		HVYCRASH	38032/11605	9.3e-16	91.63	
DUAL3	48/41	1.4e-01	0.08		HYDROELL	908527/40284	-3.6e+06	110.55	
DUAL4	34/30	7.5e-01	0.03		HYDROELM	610983/26713	-3.6e+06	40.66	
DUALC1	97/82	6.2e+03	0.11		HYDROELS	164327/67405	-3.6e+06	26.53	
DUALC2	123/93	3.6e+03	0.05		JANNSON3	8/8	2.0e+04	0.52	
DUALC5	47/47	4.3e+02	0.05		JANNSON4	111/32	9.8e+03	0.90	
DUALC8	113/95	1.8e+04	1.01		JJTABEL3	10011/1010	1.3e+14	9.62	
EG3	1449/224	1.8e-26	88.76		KISSING2	4689/2398	5.3e+00	8.50	
EIGENA	10/10	0.0e+00	0.61		KISSING	603/325	8.5e-01	6.26	
EIGMAXA	6/6	-1.0e+00	0.00		KIWCRESC	27/24	-1.8e-09	0.00	
EIGMAXB	150/110	-9.6e-01	0.14		KSIP	338/246	5.8e-01	20.77	
EIGMINA	6/6	1.0e+00	0.01		LAKES	29351/9544	3.5e+05	6.44	
EIGMINB	33/28	8.6e-01	0.04		LAUNCH	208355/75499	9.0e+00	17.19	
ELATTAR	240/173	7.4e+01	0.13		LEAKNET	476/205	8.0e+00	0.13	
EQC	7/7	-8.3e+02	0.00		LEUVEN1	7002/877	-1.5e+07	34.94	
ERRINBAR	249/128	2.8e+01	0.02		LEUVEN2	49009/7481	-1.4e+07	209.16	
EXPFITA	2245/745	1.1e-03	0.06		LEUVEN3	-/-	-	-	2
EXPFITB	2569/837	5.0e-03	0.15		LEUVEN4	-/-	-	-	2
EXPFITC	1813/640	2.3e-02	0.82		LEUVEN5	-/-	-	-	2
EXTRASIM	4/4	1.0e+00	0.00		LEUVEN6	-/-	-	-	2
FCCU	10/10	1.1e+01	0.00		LEUVEN7	421/330	6.9e+02	9.91	
FEEDLOC	348/165	0.0e+00	0.20		LIN	58/42	-2.0e-02	0.01	
FLETCHER	50/42	1.2e+01	0.00		LINSPANH	3/3	-7.7e+01	0.00	
GASOIL	2314/320	5.2e-03	324.58		LIPPERT1	-/-	-	-	2
GAUSSELM	1276/555	-1.1e+01	15.88		LIPPERT2	21118/1126	0.0e+00	422.81	3
GIGOMEZ1	28/27	-3.0e+00	0.00		LISWET10	27914/2386	9.8e+00	21.64	
GIGOMEZ2	44/44	2.0e+00	0.00		LISWET11	9899/1031	9.9e+00	9.42	
GIGOMEZ3	28/28	2.0e+00	0.00		LISWET12	62021/3717	3.5e+02	27.93	
GILBERT	158/149	2.5e+03	12.91		LISWET1	33659/1825	7.2e+00	16.34	
GLIDER	-/-	-	-	2	LISWET2	54450/4000	5.0e+00	33.85	
GMNCASE1	253/153	2.7e-01	2.24		LISWET3	387/242	5.0e+00	2.93	
GMNCASE2	375/206	-9.9e-01	3.30		LISWET4	858/311	5.0e+00	3.69	
GMNCASE3	265/163	1.5e+00	2.65		LISWET5	552/355	5.0e+00	3.93	
GMNCASE4	823/482	5.9e+03	21.43		LISWET6	849/283	5.0e+00	3.28	
GOFFIN	26/23	1.9e-12	0.02		LISWET7	31053/1810	9.9e+01	15.83	
GOULDQP1	164/101	-3.5e+03	0.01		LISWET8	10560/1037	1.4e+02	9.47	
GOULDQP2	34/32	1.6e-12	1.42		LISWET9	27207/2175	3.9e+02	16.65	
GOULDQP3	42/39	2.4e-05	2.54		LOADBAL	75/46	4.5e-01	0.01	
GPP	3916/449	2.3e+05	0.00		LOOTSMA	24744/2640	0.0e+00	0.21	3
GRIDNETA	273/122	1.7e+03	2.48		LOTSCHD	74/72	2.4e+03	0.01	
GRIDNETC	176/137	4.3e+02	1.42		LSNNOLOC	32/26	1.2e+02	0.00	
GRIDNETD	293/143	5.7e+02	12.06		LSQFIT	26/22	3.4e-02	0.00	
GRIDNETF	628/357	2.4e+02	19.98		LUKVLI10	399/145	3.5e+03	8.57	
GRIDNETG	250/123	6.2e+02	8.71		LUKVLI11	225/116	3.0e-13	3.89	
GRIDNETI	534/324	2.4e+02	15.61		LUKVLI12	75/75	3.2e-08	31.72	
HADAMARD	403/291	1.1e+00	35.46		LUKVLI13	99/63	1.3e+02	1.48	
HAGER4	844/784	2.8e+00	0.00	1	LUKVLI14	70/65	1.6e+04	8.02	
HAIFAL	-/-	-	-	2	LUKVLI15	1333/377	7.1e+00	193.79	
HAIFAM	262018/104306	1.7e+05	151.60	1	LUKVLI16	1426/220	3.0e+03	7.93	
HAIFAS	86/55	-4.5e-01	0.01		LUKVLI17	1738/180	7.8e+02	5.58	
HALDMADS	141/130	1.2e-04	0.04		LUKVLI18	93/62	7.6e-16	1.22	

# Annexe D. Résultats numériques de ALGENCAN

Problème	#f/#g	f	CPU	e	Problème	#f/#g	f	CPU	e
LUKVL11	24118/17171	5.7e+00	706.29		OET7	1059/736	4.4e-05	65.67	
LUKVL13	119/63	1.2e+01	1.14		OPTCDEG2	113673/9921	2.3e+02	871.12	
LUKVL14	763/236	-3.5e+05	11.86		OPTCDEG3	23290/10777	4.6e+01	365.06	
LUKVL15	410/208	1.1e+01	196.78		OPTCNTRL	208/171	5.5e+02	0.02	
LUKVL16	134/76	6.3e+05	5.53		OPTMASS	271621/8365	-6.6e-02	0.00	3
LUKVL17	1268/1415	-3.7e+02	12.60	1	OPTPRLOC	235871/70954	-1.6e+01	10.41	
LUKVL18	21148/1354	1.0e+06	987.08	3	ORBIT2	1724/629	3.1e+02	176.50	
LUKVL19	1376/145	1.0e+03	2.61		ORTHREGE	-/-	-	-	2
MADSEN	53/52	6.2e-01	0.01		ORTHREGF	131/93	6.3e+01	129.04	
MADSSCHJ	54/43	-5.0e+03	3.25		OSORIO	72/52	1.1e+01	1.03	
MAKELA1	34/25	-1.4e+00	0.00		PDE1	-/-	-	-	2
MAKELA2	42/41	7.2e+00	0.00		PDE2	-/-	-	-	2
MAKELA3	28/27	-1.9e-13	0.01		PENTAGON	175/93	1.5e-04	0.01	
MAKELA4	35/24	9.0e-18	0.00		PFIT1	917/575	0.0e+00	0.04	
MANNE	35/29	-9.7e-01	0.38		PFIT2	1165/734	0.0e+00	0.05	
MARINE	-/-	-	-	2	PFIT3	1904/1186	0.0e+00	0.07	
MATRIX2	13/13	1.2e-17	0.00		PFIT4	2098/1311	0.0e+00	0.09	
MCONCON	274/175	-6.2e+03	0.02		PINENE	-/-	-	-	2
METHANOL	3805/514	9.0e-03	0.00		POLAK1	18/18	2.7e+00	0.00	
MIFFLIN1	41/28	-1.0e+00	0.00		POLAK2	16/16	5.5e+01	0.00	
MIFFLIN2	31/28	-1.0e+00	0.00		POLAK3	27/27	1.0e+20	0.02	
MINC44	116/89	3.8e-04	4.89		POLAK4	238/135	1.7e-10	0.01	
MINMAXBD	2471/805	1.2e+02	0.06		POLAK5	148/138	5.0e+01	0.01	
MINMAXRB	78/60	-1.1e-17	0.01		POLAK6	32/26	-4.4e+01	0.00	
MINPERM	82/78	3.6e-04	26.86		POLYGON	12721/5301	-7.8e-01	97.24	
MISTAKE	45/38	-1.0e+00	0.01		PORTFL1	38/29	2.0e-02	0.01	
MOSARQP1	3890/868	-3.8e+03	3.10		PORTFL2	37/29	3.0e-02	0.01	
MOSARQP2	1001/142	-5.1e+03	0.68		PORTFL3	34/27	3.3e-02	0.01	
MPC10	7035/1494	-1.5e+07	71.02		PORTFL4	34/28	2.6e-02	0.01	
MPC11	10541/1770	-1.5e+07	83.02		PORTFL6	9/9	2.6e-02	0.00	
MPC12	5426/979	-1.5e+07	47.65		PORTSNQP	22434/11303	3.3e+04	752.73	3
MPC13	3018/793	-1.5e+07	36.76		PORTSQP	37/36	3.3e+04	3.27	
MPC14	7231/1187	-1.5e+07	51.19		POWELL20	14458/2761	6.5e+09	36.50	
MPC15	3436/777	-1.5e+07	34.68		PRIMAL1	122/64	-3.5e-02	0.64	
MPC16	-/-	-	-	2	PRIMAL2	98/48	-3.4e-02	0.28	
MPC1	148870/20182	-2.4e+07	0.00	3	PRIMAL3	431/108	-1.4e-01	1.47	
MPC2	8430/1695	-1.5e+07	81.96		PRIMAL4	446/104	-7.5e-01	1.07	
MPC3	28997/3698	-1.5e+07	180.45		PRIMALC1	68590/19066	-6.2e+03	13.01	
MPC4	15524/1870	-1.5e+07	71.23		PRIMALC2	2287/645	-3.6e+03	0.30	
MPC5	46822/3917	-1.5e+07	157.81		PRIMALC5	22778/7004	-4.3e+02	5.28	
MPC6	5064/1047	-1.5e+07	56.80		PRIMALC8	306/52	-1.8e+04	0.05	
MPC7	2671/838	-1.5e+07	41.68		PRODPL0	283/220	5.9e+01	0.03	
MPC8	7033/3186	-1.5e+07	99.53		PRODPL1	336/198	3.6e+01	0.04	
MPC9	5535/3862	-1.5e+07	110.95		PT	189/189	1.8e-01	3.02	
MRIBASIS	1064/448	1.8e+01	0.15		QC	19/18	-9.6e+02	0.00	
NASH	430/432	0.0e+00	0.05	3	QPBAND	791/754	-5.0e+04	16.38	
NCVXQP1	53/45	-3.4e+03	0.00		QPCBLEND	421/176	-1.6e-13	0.07	
NCVXQP2	54/39	-2.7e+03	0.00		QPCBOEI1	292278/103530	1.2e+07	533.76	1
NCVXQP3	43/34	-2.5e+03	0.00		QPCBOEI2	305884/106034	8.2e+06	141.24	1
NCVXQP4	44/30	-5.6e+03	0.00		QPCSTAIR	1568/601	6.2e+06	2.24	
NCVXQP5	41/31	-3.6e+03	0.00		QPNBAND	39/18	-2.5e+05	0.96	
NCVXQP6	94/60	-3.0e+03	0.01		QPNBLEND	1010/469	-2.6e-13	0.22	
NCVXQP7	67/50	-3.0e+03	0.00		QPNBOEI1	362123/98685	1.1e+07	369.92	1
NCVXQP8	71/53	-2.4e+03	0.01		QPNBOEI2	227760/80061	1.4e+06	70.11	
NCVXQP9	9/9	-2.3e+03	0.00		QPNSTAIR	3438/1295	5.1e+06	5.44	
NET1	614/437	9.4e+05	0.12		QR3D	10/10	0.0e+00	1.28	
NET2	480/285	1.2e+06	0.24		RDW2D52F	48/22	8.6e-03	0.01	
NET3	2339/920	5.9e+06	5.46		READING1	16048/4979	-1.6e-01	458.32	
NET4	-/-	-	-	2	READING2	-/-	-	-	2
NGONE	8356/3530	-6.4e-01	40.26		READING3	122509/25938	-1.5e-01	823.15	1
NUFFIELD	-/-	-	-	2	READING4	-/-	-	-	2
ODFITS	11/11	-2.4e+03	0.00		READING5	9/9	0.0e+00	0.24	
OET1	163/162	5.4e-01	15.16		READING6	3820/2084	-1.4e+02	1.92	
OET2	200/193	8.7e-02	25.40		READING7	269/185	-1.2e+03	32.33	
OET3	229/219	4.5e-03	28.72		READING8	123/92	-2.4e+03	157.16	
OET4	277/269	4.3e-03	37.50		READING9	30374/12046	-5.0e+39	685.86	3
OET5	976/724	2.7e-03	40.19		RES	1/1	0.0e+00	0.00	
OET6	337/276	2.1e-03	34.80		RK23	136/106	8.3e-02	0.01	

# Annexe D. Résultats numériques de ALGENCAN

Problème	#f/#g	f	CPU	e	Problème	#f/#g	f	CPU	e
ROBOTARM	2198/1044	0.0e+00	34.58	3	TABLE5	151/123	2.9e+09	5.08	
ROBOT	53/47	5.5e+00	0.01		TABLE6	18995/1469	2.8e+12	6.32	
ROCKET	-/-	-	-	2	TABLE7	82/66	7.8e+08	0.27	
ROSENMMX	637/245	-4.4e+01	0.01		TABLE8	19/17	1.9e+02	0.05	
ROTDISC	122217/19664	7.9e+00	148.26		TAME	10/10	0.0e+00	0.00	
S268	27/19	-7.3e-12	0.00		TARGUS	100/62	1.7e+07	0.03	
S277-280	90/85	5.1e+00	0.01		TENBARS1	801/454	2.3e+03	0.06	
SAROMM	3229/1050	5.7e+01	72.52		TENBARS2	738/398	2.3e+03	0.05	
SARO	-/-	-	-	2	TENBARS3	575/295	2.2e+03	0.04	
SAWPATH	90098/5749	7.5e+02	484.87	3	TENBARS4	308/140	3.7e+02	0.02	
SEMICON1	1376/1001	0.0e+00	30.69		TFI1	109/94	5.3e+00	0.04	
SEMICON2	370/293	0.0e+00	14.24		TFI2	110/110	6.5e-01	0.05	
SIMPLLPB	22/22	1.0e+00	0.00		TFI3	108/94	4.3e+00	0.03	
SIMPLLPB	23/23	1.1e+00	0.00		TOYSARAH	-/-	-	-	2
SINROSNB	8076/4612	6.3e+01	11.40		TRAINF	5703/2958	3.1e+00	755.63	
SIPOW1M	195/160	-1.0e+00	112.77		TRAINH	8585/3570	1.2e+01	40.96	
SIPOW1	212/175	-1.0e+00	118.60		TRIMLOSS	113016/35651	9.4e+00	20.18	1
SIPOW2M	166/138	-1.0e+00	82.12		TRO11X3	92740/2673	-1.0e+20	1.97	3
SIPOW2	184/156	-1.0e+00	112.65		TRO21X5	-/-	-	-	2
SIPOW3	181/155	5.3e-01	111.58		TRO3X3	451/312	-1.0e+20	0.03	3
SIPOW4	305/238	2.7e-01	201.08		TRO41X9	-/-	-	-	2
SMBANK	220/71	-7.1e+06	0.05		TRO4X4	4522/553	-1.0e+20	0.21	3
SMMPSF	13518/2502	1.0e+06	7.11		TRO5X5	12/12	9.0e+00	0.01	
SNAKE	37977/24691	-2.6e+02	1.24	3	TRO6X2	307/181	-1.0e+20	0.02	3
SOSQP1	5/5	1.3e-10	0.07		TRUSPYR1	428/249	1.1e+01	0.03	
SOSQP2	13/13	-1.2e+03	6.34		TRUSPYR2	642/404	1.1e+01	0.04	
SPIRAL	156/113	1.9e-13	0.01		TRY-B	11/11	1.0e+00	0.00	
SREADIN3	-/-	-	-	2	TWIRIBG1	-/-	-	-	2
SSEBLIN	258/144	1.6e+07	0.03		TWIRIMD1	6522/3093	-1.0e+00	164.73	
SSEBNLN	264/139	1.6e+07	0.04		TWIRISM1	2586/1101	-1.0e+00	8.64	
SSNLBEAM	-/-	-	-	2	TWOBARS	29/29	1.5e+00	0.01	
STANCMIN	128/125	4.2e+00	0.01		TWOD	-/-	-	-	2
STCQP1	311/122	3.7e+05	11.32		UBH1	89/89	1.1e+00	1.81	
STCQP2	69/64	3.7e+04	14.56		UBH5	208/173	1.1e+00	2.74	
STEENBRA	224/152	1.7e+04	0.07		VANDERM1	501/291	0.0e+00	21.21	
STEENBRB	6134/1333	9.3e+03	1.16		VANDERM2	501/291	0.0e+00	21.21	
STEENBRC	1954/710	3.1e+04	0.80		VANDERM3	270/186	0.0e+00	22.15	
STEENBRD	7392/1734	9.3e+03	1.55		WACHBIEG	52/47	1.0e+00	0.01	
STEENBRE	1543/531	3.0e+04	0.56		WATER	87/61	1.1e+04	0.01	
STEENBRF	11619/2376	9.2e+03	1.74		WOMFLET	180/107	-3.7e-15	0.01	
STEENBRG	1258/485	2.9e+04	0.51		YAO	113657/8176	2.0e+02	62.87	
STEERING	26/26	5.5e-01	30.89		YORKNET	21427/3402	2.0e+04	4.23	3
STNQP1	115/84	-3.1e+05	6.81		ZAMB2-10	834/379	-1.6e+00	0.27	
STNQP2	634/171	-5.7e+05	21.20		ZAMB2-11	511/215	-1.1e+00	0.19	
SUPERSIM	22/22	6.7e-01	0.00		ZAMB2-8	385/198	-1.5e-01	0.09	
SVANBERG	34048/3600	8.4e+03	117.87		ZAMB2-9	334/187	-3.5e-01	0.07	
SWOPF	139/88	6.8e-02	0.06		ZAMB2	2009/1070	-1.1e+01	8.46	
SYNTHESE1	68/50	7.6e-01	0.01		ZECEVIC2	24/21	-4.1e+00	0.00	
SYNTHESE2	536/232	-5.5e-01	0.02		ZECEVIC3	36/34	9.7e+01	0.00	
SYNTHESE3	700/276	1.5e+01	0.02		ZECEVIC4	40/28	7.6e+00	0.01	
TABLE1	18997/1471	2.8e+12	6.34		ZIGZAG	4133/1819	8.6e+01	14.40	
TABLE3	151/123	2.9e+09	5.08		ZY2	49/32	2.0e+00	0.00	
TABLE4	151/123	2.9e+09	5.05						



TABLE D.5 – Résultats de ALGENCAN sur des problèmes dégénérés des collections COPS et CUTer

Problème	#f/ #g	f	CPU	e	Problème	#f/ #g	f	CPU	e
aug3d	13/ 13	5.5e+02	0.15		hs052	13/ 13	5.3e+00	0.00	
aug3dc	29/ 30	7.7e+02	0.20		hs061	31/ 32	-1.4e+02	0.00	
bt01	76/ 52	-1.0e+00	0.00		hs077	44/ 39	2.4e-01	0.00	
bt02	67/ 60	3.3e-02	0.00		hs078	13/ 13	-2.9e+00	0.00	
bt03	13/ 13	4.1e+00	0.00		hs079	34/ 35	7.9e-02	0.00	
bt04	45/ 40	-4.6e+01	0.00		hs100lnp	49/ 40	6.8e+02	0.00	
bt05	38/ 32	9.6e+02	0.00		lukvle01	64/ 62	6.2e+00	0.20	
bt06	41/ 38	2.8e-01	0.00		lukvle02	13/ 13	2.8e+04	0.06	
bt07	46/ 39	3.6e+02	0.00		lukvle03	41/ 38	1.4e+01	0.04	
bt08	32/ 26	1.0e+00	0.00		lukvle04	37/ 38	4.8e+03	0.09	
bt09	34/ 35	-1.0e+00	0.00		lukvle05	85/ 75	4.1e+00	0.23	
bt11	54/ 55	8.2e-01	0.00		lukvle06	40/ 39	6.3e+04	3.82	
bt12	13/ 13	6.2e+00	0.00		lukvle07	396/ 168	-1.1e+03	0.15	
byrdsphr	39/ 38	-4.7e+00	0.00		lukvle08	436/ 270	-9.8e+04	1.23	
catena	394/ 149	-2.1e+06	130.20		lukvle09	477/ 240	1.0e+02	0.16	
chain1	5793/ 2595	5.1e+00	13.40		lukvle10	39/ 38	3.5e+02	0.09	
chain2	6297/ 2450	5.1e+00	50.64		lukvle11	28/ 29	4.4e-23	0.04	
chain3	6005/ 2234	5.1e+00	241.49		lukvle12	36/ 37	1.5e+03	0.07	
dixchlng	119/ 102	2.5e+03	0.01		lukvle13	94/ 82	3.1e+03	0.19	
dtoc1na	32/ 33	1.3e+01	0.52		lukvle14	164/ 110	5.2e+03	0.18	
dtoc1nb	38/ 37	1.6e+01	0.65		lukvle15	108/ 95	5.0e-29	0.16	
dtoc1nc	133/ 99	2.5e+01	1.72		lukvle16	37/ 38	3.5e+01	0.06	
dtoc1nd	252/ 107	1.3e+01	0.95		lukvle17	37/ 38	1.0e+03	0.05	
dtoc2	13/ 13	4.7e-01	0.14		lukvle18	27/ 28	1.0e+03	0.04	
dtoc5	13/ 13	1.5e+00	0.20		maratos	31/ 32	-1.0e+00	0.00	
dtoc6	63/ 62	1.3e+05	0.79		mwright	40/ 35	2.5e+01	0.00	
eigena2	36/ 31	4.0e-30	0.03		orthrdm2	37/ 33	1.6e+02	0.44	
eigenaco	39/ 26	5.7e-22	0.03		orthrega	363/ 251	1.4e+03	11.52	
eigenb2	95/ 78	1.1e-21	0.11		orthregb	13/ 13	0.0e+00	0.00	
eigenbco	221/ 166	1.8e-30	0.35		orthregc	159/ 123	1.9e+02	65.13	
eigenc2	135/ 107	4.4e-27	4.33		orthregd	1037/ 685	1.6e+03	338.78	
eigencco	93/ 75	4.9e-31	0.02		orthrgdm	141/ 124	1.5e+03	43.70	
elec1	215/ 150	1.1e+03	0.66		orthrgds	187/ 111	1.5e+03	48.16	
elec2	280/ 195	4.4e+03	5.13		robot	56/ 46	5.5e+00	0.00	
elec3	590/ 288	1.8e+04	85.56		s216	46/ 40	1.0e+00	0.00	
gilbert	55/ 57	4.8e+02	0.21		s219	36/ 36	-1.0e+00	0.00	
gridnetb	13/ 13	1.4e+02	0.36		s235	46/ 41	4.0e-02	0.00	
hager1	39/ 48	8.8e-01	161.41		s269	13/ 13	4.1e+00	0.00	
hager2	763/ 280	4.3e-01	424.48		s316	40/ 34	3.3e+02	0.00	
hager3	48/ 58	1.4e-01	254.80		s317	38/ 34	3.7e+02	0.00	
hs006	13/ 13	0.0e+00	0.00		s318	39/ 36	4.1e+02	0.00	
hs007	34/ 35	-1.7e+00	0.00		s319	47/ 39	4.5e+02	0.00	
hs009	43/ 29	-5.0e-01	0.00		s320	51/ 40	4.9e+02	0.00	
hs026	124/ 102	7.7e-17	0.01		s321	49/ 39	5.0e+02	0.00	
hs027	36/ 37	4.0e-02	0.00		s322	54/ 39	5.0e+02	0.00	
hs028	5/ 5	1.1e-28	0.00		s335	55/ 57	-4.5e-03	0.00	
hs039	34/ 35	-1.0e+00	0.00		s336	35/ 34	-3.4e-01	0.00	
hs040	13/ 13	-2.5e-01	0.00		s338	42/ 33	-1.1e+01	0.00	
hs046	75/ 60	1.4e-16	0.00		s344	33/ 34	3.3e-02	0.00	
hs047	98/ 82	-2.7e-02	0.01		s345	44/ 39	3.3e-02	0.00	
hs048	5/ 5	0.0e+00	0.00		s375	47/ 41	-1.5e+01	0.00	
hs049	108/ 79	2.2e-12	0.00		s378	49/ 39	-4.8e+01	0.00	
hs050	40/ 28	3.5e-29	0.00		s394	56/ 58	1.9e+00	0.01	
hs051	5/ 5	0.0e+00	0.00		s395	57/ 59	1.9e+00	0.01	

# Annexe D. Résultats numériques de ALGENCAN

TABLE D.6 – Résultats de ALGENCAN sur des problèmes de la collection MacMPEC

Problème	#f/ #g	f	CPU	e	Problème	#f/ #g	f	CPU	e
bar-truss-3	82257/ 42621	1.4e+00	7.39		gauvin	17/ 17	1.1e−18	0.00	
bard1	31/ 26	2.0e+00	0.00		hs044-i	97/ 63	6.3e−06	0.01	
bard1m	31/ 26	2.0e+00	0.00		incid-set1-8	−/ −	−	−	5
bard2	80/ 79	−6.6e+03	0.01		incid-set1c-8	−/ −	−	−	5
bard2m	78/ 77	−6.6e+03	0.01		incid-set2-8	−/ −	−	−	5
bard3	28/ 23	−1.3e+01	0.00		incid-set2c-8	−/ −	−	−	5
bard3m	34/ 28	−1.6e+01	0.00		jr1	16/ 16	5.0e−01	0.00	
bilevel1	29/ 27	−3.0e+01	0.00		jr2	6/ 7	2.8e−19	0.00	
bilevel2	38/ 38	−6.6e+03	0.00		kth1	32/ 22	0.0e+00	0.00	
bilevel3	52/ 39	−1.6e+01	0.00		kth2	11/ 12	0.0e+00	0.00	
bilin	73/ 47	−5.8e+01	0.00		kth3	1/ 1	0.0e+00	0.00	
dempe	2620/ 1286	1.6e+01	0.05		nash1	25/ 19	3.9e−31	0.00	
design-cent-1	750/ 493	−8.8e+20	0.04		nash1a	25/ 19	3.9e−31	0.00	
design-cent-2	518/ 300	−3.1e+40	0.03		outrata31	32/ 27	2.6e+00	0.00	
design-cent-4	132/ 94	−4.0e+00	0.01		outrata32	50/ 44	2.6e+00	0.00	
design-init-1	4/ 4	−2.5e−09	0.00		outrata33	69/ 51	2.7e+00	0.00	
design-init-2	4/ 4	−2.5e−09	0.00		outrata34	42/ 41	2.6e+00	0.00	
design-init-3	4/ 4	−2.5e−09	0.00		pack-comp1-8	744/ 268	6.0e−01	0.26	
design-init-4	−/ −	−	−	6	pack-comp1c-8	542/ 295	6.0e−01	0.29	
desilva	30/ 30	−1.0e+00	0.00		pack-comp2c-8	695/ 383	6.7e−01	0.38	
df1	13/ 13	9.9e−17	0.00		pack-rig1-8	261/ 160	7.9e−01	0.12	
ex9.1.1	77/ 63	−1.3e+01	0.01		pack-rig1c-8	426/ 237	7.9e−01	0.15	
ex9.1.10	35/ 24	−3.2e+00	0.00		pack-rig1p-8	431/ 256	7.9e−01	0.19	
ex9.1.2	−/ −	−	−	5	pack-rig2-8	291/ 190	7.8e−01	0.11	
ex9.1.3	33/ 32	−5.8e+01	0.00		pack-rig2c-8	611/ 386	8.0e−01	0.24	
ex9.1.4	37/ 35	−3.7e+01	0.00		pack-rig2p-8	428/ 249	7.8e−01	0.27	
ex9.1.5	30/ 25	−1.0e+00	0.00		portfl-i-1	23/ 24	2.0e−24	0.01	
ex9.1.6	57/ 50	−5.2e+01	0.01		qpec1	17/ 18	8.0e+01	0.00	
ex9.1.7	35/ 28	−5.0e+01	0.00		qpec2	16/ 17	0.0e+00	0.00	
ex9.1.8	35/ 24	−3.2e+00	0.00		ralphmod	147458/ 53206	−6.8e+02	63.65	1
ex9.1.9	44/ 42	2.0e+00	0.00		scholtes1	20/ 21	2.0e+00	0.00	
ex9.2.1	29/ 26	2.0e+00	0.00		scholtes2	9/ 9	1.5e+01	0.00	
ex9.2.2	17/ 18	5.0e+01	0.00		scholtes3	13/ 13	4.8e−25	0.00	
ex9.2.3	43/ 32	5.0e+00	0.00		scholtes5	10/ 10	1.0e+00	0.00	
ex9.2.4	25/ 20	3.9e−31	0.00		sl1	27/ 28	1.0e−04	0.00	
ex9.2.5	16/ 16	2.9e−20	0.00		stackelberg1	26/ 27	−3.3e+03	0.00	
ex9.2.6	35/ 21	−1.5e+00	0.00		tap-09	13/ 13	1.1e+02	0.00	
ex9.2.7	29/ 26	2.0e+00	0.00		tap-15	13/ 13	1.8e+02	0.01	
ex9.2.8	14/ 14	1.0e+00	0.00		water-net	113214/ 25511	9.7e+02	6.97	
ex9.2.9	17/ 17	2.0e+00	0.00						



## Annexe E

# Résultats numériques de LANCELOT

Nous présentons dans cette annexe les résultats numériques obtenus avec LANCELOT sur l'ensemble des problèmes donnés dans les tableaux [A.1-A.4](#). Le tableau [D.2](#) énumère les résultats de LANCELOT-A utilisés dans les comparaisons du chapitre [3](#). Les tableaux [E.3](#), [E.5](#), [E.6](#) énumèrent les résultats de LANCELOT-A utilisés dans l'étude numérique du chapitre [4](#). Les résultats de LANCELOT-B sur les problèmes provenant de la librairie CUTEst sont décrits dans le tableau [E.4](#)<sup>16</sup>. Pour chaque problème, nous donnons les nombres suivants : nombre d'évaluations de fonctions (#f) et de gradients (#g), valeur finale de la fonction objectif (f), temps CPU en secondes (CPU). Un nombre positif dans la colonne (e) indique un échec. Le tableau [E.1](#) donne les différents types d'erreurs retournées par LANCELOT-A et LANCELOT-B.

e	Message d'erreur
1	Nombre maximum d'itérations atteint
2	Temps CPU maximum dépassé
3	Pas de recherche trop petit
4	Ne peut pas trouver un point réalisable

TABLE E.1 – Les messages d'erreur retournés par LANCELOT-A et LANCELOT-B

---

16. Pour les 46 premiers problèmes provenant de la collection CUTEst, LANCELOT-B termine avec un échec du au dépassement du temps CPU maximum. C'est pourquoi, les résultats de LANCELOT-B sur ces problèmes ne sont pas inclus dans le tableau [E.4](#).

TABLE E.2 – Résultats de LANCELOT-A sur des problèmes d'égalité de CUTer et COPS

Problème	Problèmes standards				Problèmes dégénérés			
	#f/ #g	f	CPU	e	#f/ #g	f	CPU	e
aug3d	16/16	5.5e+02	0.38		25/21	5.5e+02	0.41	
aug3dc	17/17	7.7e+02	0.34		22/22	7.7e+02	0.40	
bt01	20/18	-1.0e+00	0.00		21/20	-1.0e+00	0.00	
bt02	38/33	3.3e-02	0.00		66/54	3.3e-02	0.00	
bt03	7/7	4.1e+00	0.00		32/27	4.1e+00	0.00	
bt04	27/26	-4.6e+01	0.00		28/27	-4.6e+01	0.00	
bt05	21/19	9.6e+02	0.00		25/20	9.6e+02	0.00	
bt06	26/21	2.8e-01	0.00		38/32	2.8e-01	0.00	
bt07	52/49	3.1e+02	0.00		44/42	3.1e+02	0.00	
bt08	32/28	1.0e+00	0.00		30/28	1.0e+00	0.00	
bt09	26/26	-1.0e+00	0.00		31/31	-1.0e+00	0.00	
bt11	23/21	8.2e-01	0.00		27/27	8.2e-01	0.00	
bt12	11/11	6.2e+00	0.00		19/19	6.2e+00	0.00	
byrdsphr	46/42	-4.7e+00	0.00		69/58	-4.7e+00	0.00	
catena	100/70	-2.1e+06	0.94		336/268	-2.1e+06	1.78	3
chain1	3001/2474	-4.9e+05	3.40	1	3001/2491	-5.6e+05	3.48	1
chain2	3001/2475	-2.5e+05	5.81	1	3001/2479	-3.3e+05	6.25	1
chain3	3001/2479	-3.7e+05	12.10	1	3001/2477	-4.5e+05	12.51	1
dixchlng	56/47	7.4e-14	0.01		42/37	1.4e-14	0.01	
dtoc1na	17/17	1.3e+01	1.10		22/17	1.3e+01	1.24	
dtoc1nb	19/19	1.6e+01	1.23		20/20	1.6e+01	1.23	
dtoc1nc	35/31	2.5e+01	1.94		38/31	2.5e+01	1.99	
dtoc1nd	76/63	1.3e+01	3.16		69/57	1.3e+01	2.71	
dtoc2	80/80	5.1e-01	7.52		87/87	5.1e-01	7.17	
dtoc5	109/109	1.5e+00	1.56		157/140	1.5e+00	2.02	
dtoc6	329/207	1.3e+05	43.75		272/193	1.3e+05	38.78	
eigena2	15/12	8.7e-30	0.01		15/12	8.7e-30	0.01	
eigenaco	31/30	4.9e-18	0.03		31/30	4.9e-18	0.04	
eigenb2	86/69	8.1e-16	0.08		91/77	5.3e-17	0.08	
eigenbco	195/162	1.9e-16	0.31		149/121	3.8e-16	0.27	
eigenc2	1278/1073	3.7e-17	10.32		1515/1283	1.4e-17	14.36	
eigencco	23/22	7.0e-19	0.01		21/20	2.6e-18	0.01	
elec1	49/41	1.1e+03	0.25		55/45	1.1e+03	0.32	
elec2	71/57	4.4e+03	1.76		89/64	4.4e+03	2.69	
elec3	152/98	1.8e+04	14.39		159/110	1.8e+04	20.62	
gilbert	31/31	4.8e+02	0.15		52/52	4.8e+02	4.48	
gridnetb	36/36	1.4e+02	20.95		41/41	1.4e+02	20.58	
hager1	9/9	8.8e-01	0.17		102/94	8.8e-01	1.06	
hager2	65/65	4.3e-01	1.06		141/135	4.3e-01	2.05	
hager3	72/72	1.4e-01	1.79		114/114	1.4e-01	2.62	
hs006	71/62	1.2e-30	0.00		87/75	1.7e-18	0.01	
hs007	30/27	-1.7e+00	0.00		42/36	-1.7e+00	0.00	
hs009	23/23	-5.0e-01	0.00		23/23	-5.0e-01	0.00	
hs026	69/69	3.8e-13	0.00		85/81	1.2e-12	0.00	
hs027	33/31	4.0e-02	0.00		55/48	4.0e-02	0.00	
hs028	4/4	1.7e-29	0.00		11/11	0.0e+00	0.00	
hs039	26/26	-1.0e+00	0.00		31/31	-1.0e+00	0.00	
hs040	14/14	-2.5e-01	0.00		11/11	-2.5e-01	0.00	
hs046	68/66	2.6e-14	0.00		181/170	1.5e-14	0.01	
hs047	53/51	3.0e-15	0.00		62/60	1.3e-16	0.00	
hs048	3/3	3.2e-30	0.00		9/9	0.0e+00	0.00	
hs049	83/83	1.6e-12	0.00		84/84	1.1e-12	0.00	
hs050	14/14	1.6e-17	0.00		14/14	1.3e-17	0.00	
hs051	17/17	3.0e-17	0.00		16/16	1.0e-18	0.00	
hs052	8/8	5.3e+00	0.00		24/24	5.3e+00	0.00	
hs061	20/18	-1.4e+02	0.00		27/24	-1.4e+02	0.00	
hs077	29/24	2.4e-01	0.00		34/27	2.4e-01	0.00	
hs078	14/12	-2.9e+00	0.00		18/15	-2.9e+00	0.00	
hs079	17/15	7.9e-02	0.00		26/23	7.9e-02	0.00	
hs100lnp	34/30	6.8e+02	0.00		72/60	6.8e+02	0.00	
lukvle01	29/24	6.2e+00	0.10		35/30	6.2e+00	0.11	
lukvle02	146/54	2.8e+04	0.87		124/56	2.8e+04	0.89	
lukvle03	25/25	1.4e+01	0.04		49/43	1.4e+01	0.06	
lukvle04	63/44	4.8e+03	0.16		44/32	4.8e+03	0.13	
lukvle05	59/51	4.1e+00	0.18		70/59	4.1e+00	0.21	

# Annexe E. Résultats numériques de LANCELOT

Problème	Problèmes standard				Problèmes dégénérés			
	#f/ #g	f	CPU	e	#f/ #g	f	CPU	e
lukvle06	57/39	6.3e+04	0.30	3	46/37	6.3e+04	0.27	3
lukvle07	124/84	-1.1e+03	0.10		123/85	-1.1e+03	0.09	
lukvle08	263/206	-9.8e+04	0.69		106/90	-9.8e+04	0.30	
lukvle09	69/59	1.0e+02	0.05	3	61/52	1.0e+02	0.05	3
lukvle10	40/32	3.6e+02	0.07		39/30	3.6e+02	0.07	
lukvle11	96/80	8.3e-20	0.15		35/29	2.5e-17	0.06	
lukvle12	68/65	1.5e+00	0.10	3	111/78	1.5e+03	0.16	3
lukvle13	96/88	3.1e+03	0.61		134/111	3.1e+03	0.77	
lukvle14	65/56	5.2e+03	0.17		105/75	5.2e+03	0.22	
lukvle15	27/27	9.6e-21	0.04	3	53/43	5.4e-20	0.08	3
lukvle16	35/28	3.5e+01	0.06		32/32	3.5e+01	0.05	
lukvle17	29/29	1.0e+03	0.04		39/32	1.0e+03	0.05	
lukvle18	54/30	1.0e+03	0.07	3	62/37	1.0e+03	0.08	3
maratos	12/12	-1.0e+00	0.00		18/17	-1.0e+00	0.00	
mwright	22/20	2.5e+01	0.00		26/23	2.5e+01	0.00	
orthrdm2	81/64	1.6e+02	1.45	3	114/90	1.6e+02	1.75	3
orthrega	218/182	1.4e+03	0.36		307/272	1.4e+03	0.58	
orthregb	77/62	3.1e-19	0.02		176/143	1.7e-18	0.03	
orthregc	147/60	1.9e+02	6.04	3	59/47	1.9e+02	3.24	3
orthregd	311/243	2.5e+03	17.34		367/310	3.6e+03	25.64	
orthrgdm	110/83	1.5e+03	4.93		353/283	5.1e+03	24.69	
orthrgds	321/266	2.5e+03	20.92	3	445/359	3.6e+03	29.03	3
robot	37/30	5.5e+00	0.00		30/26	5.5e+00	0.00	
s216	18/16	1.0e+00	0.00		20/20	1.0e+00	0.00	
s219	32/32	-1.0e+00	0.00	3	53/53	-1.0e+00	0.00	3
s235	32/31	4.0e-02	0.00		39/37	4.0e-02	0.00	
s269	8/8	4.1e+00	0.00		25/21	4.1e+00	0.00	
s316	24/24	3.3e+02	0.00	3	29/27	3.3e+02	0.00	3
s317	30/30	3.7e+02	0.00		30/29	3.7e+02	0.00	
s318	31/31	4.1e+02	0.00		33/32	4.1e+02	0.00	
s319	30/30	4.5e+02	0.00	3	32/31	4.5e+02	0.00	3
s320	35/35	4.9e+02	0.00		37/36	4.9e+02	0.00	
s321	37/36	5.0e+02	0.00		38/35	5.0e+02	0.00	
s322	40/37	5.0e+02	0.00	3	36/33	5.0e+02	0.00	3
s335	36/36	-4.5e-03	0.00		54/54	-4.5e-03	0.00	
s336	25/23	-3.4e-01	0.00		29/26	-3.4e-01	0.00	
s338	24/23	-7.2e+00	0.00	3	25/21	-7.2e+00	0.00	3
s344	27/22	3.3e-02	0.00		45/37	3.3e-02	0.00	
s345	37/31	3.3e-02	0.00		95/79	3.3e-02	0.00	
s375	36/34	-1.5e+01	0.00	3	45/39	-1.6e+01	0.01	3
s378	59/53	-4.8e+01	0.01		70/64	-4.8e+01	0.01	
s394	30/28	1.9e+00	0.00		47/39	1.9e+00	0.01	
s395	30/28	1.9e+00	0.00		52/43	1.9e+00	0.02	

TABLE E.3 – Résultats de LANCELOT-A sur des problèmes de la collection Hock et Schittkowski

Problème	#f/ #g	f	CPU	e	Problème	#f/ #g	f	CPU	e
hs010	20/ 20	-1.0e+00	0.00		hs100	76/ 69	6.8e+02	0.00	
hs011	18/ 18	-8.5e+00	0.00		hs100mod	138/ 129	6.8e+02	0.01	
hs012	27/ 24	-3.0e+01	0.00		hs101	3001/ 2446	2.1e+03	0.21	1
hs013	110/ 108	1.0e+00	0.00		hs102	3001/ 2453	2.1e+03	0.21	1
hs014	16/ 16	1.4e+00	0.00		hs103	3001/ 2461	2.1e+03	0.21	1
hs015	48/ 42	3.1e+02	0.00		hs104	105/ 53	4.2e+00	0.00	4
hs016	20/ 17	2.5e-01	0.00		hs106	3001/ 2609	5.5e+03	0.07	1
hs017	25/ 23	1.0e+00	0.00		hs107	28/ 28	5.1e+03	0.00	3
hs018	119/ 106	5.0e+00	0.00		hs108	45/ 40	-8.7e-01	0.00	
hs019	36/ 31	-7.0e+03	0.00	3	hs109	3000/ 2760	5.5e+03	0.17	1
hs020	24/ 21	4.0e+01	0.00	3	hs111	50/ 46	-4.8e+01	0.00	
hs021	3/ 3	-1.0e+02	0.00		hs112	50/ 50	-4.8e+01	0.00	
hs022	13/ 13	1.0e+00	0.00		hs113	123/ 109	2.4e+01	0.01	
hs023	53/ 49	2.0e+00	0.00		hs114	620/ 527	-1.8e+03	0.03	3
hs024	15/ 15	-1.0e+00	0.00		hs116	3001/ 2720	5.0e+01	0.33	1
hs029	20/ 20	-2.3e+01	0.00		hs117	63/ 57	3.2e+01	0.01	
hs030	8/ 8	1.0e+00	0.00		hs118	21/ 21	6.6e+02	0.00	
hs031	13/ 12	6.0e+00	0.00		hs119	30/ 30	2.4e+02	0.00	
hs032	11/ 11	1.0e+00	0.00		hs21mod	3/ 3	-9.6e+01	0.00	
hs033	12/ 12	-4.0e+00	0.00		hs268	51/ 37	-8.8e-12	0.00	
hs034	23/ 22	-8.3e-01	0.00		hs35mod	3/ 3	2.5e-01	0.00	
hs035	11/ 11	1.1e-01	0.00		hs44new	11/ 11	-1.5e+01	0.00	
hs036	7/ 7	-3.3e+03	0.00		hs99exp	3001/ 2762	-3.8e+46	0.14	1
hs037	16/ 16	-3.5e+03	0.00		s215	10/ 9	0.0e+00	0.00	
hs041	10/ 10	1.9e+00	0.00		s217	17/ 17	-8.0e-01	0.00	
hs042	15/ 15	1.4e+01	0.00		s218	34/ 32	0.0e+00	0.00	
hs043	28/ 26	-4.4e+01	0.00		s220	1/ 1	1.0e+00	0.00	
hs044	12/ 12	-1.5e+01	0.00		s221	109/ 108	-1.0e+00	0.00	
hs053	7/ 7	4.1e+00	0.00		s222	19/ 18	-1.5e+00	0.00	
hs054	11/ 11	1.9e-01	0.00		s223	29/ 27	-8.3e-01	0.00	
hs055	7/ 7	6.7e+00	0.00		s224	9/ 9	-3.0e+02	0.00	
hs056	13/ 13	-3.5e+00	0.00		s225	54/ 49	2.0e+00	0.00	
hs057	37/ 37	2.8e-02	0.00		s226	15/ 14	-5.0e-01	0.00	
hs059	353/ 291	-7.8e+00	0.01		s227	17/ 17	1.0e+00	0.00	
hs060	22/ 19	3.3e-02	0.00		s228	22/ 21	-3.0e+00	0.00	
hs062	40/ 36	-2.6e+04	0.00	3	s230	12/ 11	3.8e-01	0.00	
hs063	22/ 17	9.6e+02	0.00		s231	38/ 34	6.3e-25	0.00	
hs064	43/ 43	6.3e+03	0.00		s232	15/ 15	-1.0e+00	0.00	
hs065	45/ 38	9.5e-01	0.00		s233	16/ 16	3.6e-29	0.00	
hs066	13/ 13	5.2e-01	0.00		s234	2/ 2	-8.0e-01	0.00	
hs067	296/ 248	-1.2e+03	0.01	3	s236	9/ 9	-5.9e+01	0.00	
hs070	40/ 39	9.4e-03	0.04		s237	306/ 279	-5.9e+01	0.01	
hs071	17/ 15	1.7e+01	0.00		s238	311/ 279	-8.2e+00	0.01	
hs072	73/ 73	7.3e+02	0.00		s239	77/ 65	-5.9e+01	0.00	
hs073	21/ 21	3.0e+01	0.00		s247	2/ 2	0.0e+00	0.00	
hs074	19/ 19	5.1e+03	0.00	3	s248	25/ 24	-8.0e-01	0.00	
hs075	119/ 107	5.2e+03	0.00	3	s249	10/ 10	1.0e+00	0.00	
hs076	11/ 11	-4.7e+00	0.00		s250	7/ 7	-3.3e+03	0.00	
hs080	16/ 14	5.4e-02	0.00		s251	16/ 16	-3.5e+03	0.00	
hs081	19/ 16	5.4e-02	0.00		s252	37/ 32	4.0e-02	0.00	
hs083	19/ 19	-3.1e+04	0.00		s253	12/ 12	6.9e+01	0.00	
hs084	48/ 45	-5.3e+06	0.00	3	s262	5/ 5	-1.0e+01	0.00	
hs085	3001/ 2769	-1.0e+00	1.12	1	s263	32/ 32	-1.0e+00	0.00	
hs086	18/ 18	-3.2e+01	0.00		s264	25/ 24	-4.4e+01	0.00	
hs087	24/ 24	8.8e+03	0.00	3	s265	13/ 12	9.7e-01	0.00	
hs088	86/ 64	1.4e+00	0.02		s268	95/ 48	4.1e-12	0.00	3
hs089	89/ 64	1.4e+00	0.02		s270	36/ 32	1.4e-14	0.00	
hs090	77/ 63	1.4e+00	0.03		s277	23/ 23	5.1e+00	0.00	
hs091	100/ 62	1.4e+00	0.04	3	s278	167/ 167	7.8e+00	0.01	
hs092	78/ 66	1.4e+00	0.06		s279	30/ 30	1.1e+01	0.00	
hs093	4/ 4	0.0e+00	0.00	4	s280	322/ 322	1.3e+01	0.03	3
hs095	25/ 21	1.6e-02	0.00		s284	624/ 549	-1.8e+03	0.06	
hs096	23/ 19	1.6e-02	0.00		s285	138/ 120	-8.3e+03	0.02	
hs097	19/ 16	4.1e+00	0.00		s315	25/ 23	-8.0e-01	0.00	
hs098	19/ 16	4.1e+00	0.00		s323	14/ 14	3.8e+00	0.00	
hs099	734/ 724	-1.0e+08	0.15	4	s324	119/ 106	5.0e+00	0.00	

# Annexe E. Résultats numériques de LANCELOT

Problème	#f/ #g	f	CPU	e	Problème	#f/ #g	f	CPU	e
s325	15/ 14	3.8e+00	0.00		s365	3000/ 2570	5.2e+01	0.11	1
s326	18/ 17	−8.0e+01	0.00		s366	175/ 136	1.2e+03	0.01	3
s327	37/ 37	2.8e−02	0.00		s367	34/ 31	−3.7e+01	0.00	
s329	50/ 38	−7.0e+03	0.00		s369	60/ 59	7.0e+03	0.00	
s330	23/ 23	1.6e+00	0.00		s372	58/ 52	1.3e+04	0.00	3
s331	61/ 40	4.3e+00	0.00		s374	73/ 63	2.3e−01	0.03	
s332	1099/ 686	8.2e+01	0.06	3	s376	3003/ 2711	−4.4e+03	0.33	1
s337	13/ 12	6.0e+00	0.00		s377	40/ 40	−8.0e+02	0.00	
s339	21/ 19	3.4e+00	0.00		s380	780/ 645	3.2e+00	0.04	
s341	21/ 21	−2.3e+01	0.00		s381	11/ 11	1.0e+00	0.00	
s342	24/ 24	−2.3e+01	0.00		s382	140/ 122	1.0e+00	0.01	
s343	34/ 34	−5.7e+00	0.00	3	s383	22/ 22	7.3e+05	0.00	3
s346	34/ 34	−5.7e+00	0.00	3	s384	167/ 143	−8.3e+03	0.02	
s353	189/ 165	−4.0e+01	0.00		s385	142/ 123	−8.3e+03	0.02	
s354	15/ 15	1.1e−01	0.00		s387	162/ 142	−8.2e+03	0.02	3
s355	462/ 413	7.0e+01	0.01		s388	313/ 268	−5.8e+03	0.05	
s357	3001/ 2446	3.6e−01	3.22	1	s389	251/ 217	−5.8e+03	0.04	
s359	1244/ 1241	−5.5e+06	0.09	3	s392	69/ 63	−1.1e+06	0.02	3
s360	89/ 79	−5.3e+06	0.00	3	s393	53/ 48	8.6e−01	0.02	
s361	36/ 31	−1.5e+04	0.00	4					



TABLE E.4 – Résultats de LANCELOT-B sur des problèmes de la collection CUTEst

Problème	#f/ #g	f	CPU	e	Problème	#f/ #g	f	CPU	e
ACOPP118	534/ 507	1.3e+05	31.15		CONGIGMZ	28/ 28	2.8e+01	0.00	
ACOPP14	75/ 65	8.1e+03	0.16		CONT5-QP	-/-	-	-	2
ACOPP300	3000/ 2823	6.7e+05	2036.80	1	CORE1	3000/ 2958	9.1e+01	1.72	1
ACOPP30	133/ 123	5.8e+02	0.77		CORE2	530/ 485	7.3e+01	0.74	
ACOPP57	3000/ 2911	4.2e+04	42.08	1	CORKSCRW	123/ 120	8.2e+01	62.88	
ACOPR118	835/ 782	1.3e+05	129.82	3	COSHFUN	1707/ 1682	-7.7e-01	497.12	
ACOPR14	3000/ 2996	1.1e+03	4.88	1	C-RELOAD	156/ 157	-1.0e+00	4.43	
ACOPR300	3000/ 2805	6.7e+05	2850.90	1	CRESC100	3000/ 2939	2.4e+01	7.53	1
ACOPR30	192/ 168	5.8e+02	1.05		CRESC132	3000/ 2852	9.8e+01	562.14	1
ACOPR57	478/ 438	4.2e+04	10.88		CRESC4	3000/ 2678	5.9e+00	0.44	1
AGG	3000/ 2996	-3.6e+07	26.55	1	CRESC50	3000/ 2893	2.2e+01	3.51	1
AIRPORT	48/ 47	4.8e+04	0.07	3	CSFI1	256/ 240	-4.9e+01	0.02	
ALJAZZAF	36/ 35	3.7e+04	4.97	3	CSFI2	175/ 156	5.5e+01	0.01	3
ALLINITA	126/ 112	3.3e+01	0.01	3	CVXQP1	78/ 49	3.6e+03	0.02	
ALLINITC	144/ 129	3.0e+01	0.01	3	CVXQP2	38/ 24	1.9e+03	0.01	
ALLINQP	-/-	-	-	2	CVXQP3	104/ 80	4.3e+03	0.04	
ALSTOTAME	15/ 15	8.2e-02	0.00		DALE	18/ 18	1.8e+04	120.54	
ANTWERP	1043/ 909	3.2e+03	0.46	3	DALLASL	74/ 73	-2.0e+05	3.10	
AUG2DCQP	46/ 44	6.5e+06	18.58		DALLASM	70/ 69	-4.8e+04	0.44	
AUG2DQP	52/ 51	6.2e+06	132.21		DALLASS	59/ 58	-3.2e+04	0.03	
AUG3DCQP	39/ 38	6.2e+04	35.73	3	DECONVC	24/ 24	2.7e-03	0.03	
AUG3DQP	33/ 36	5.4e+04	265.37	3	DEGENLPA	30/ 25	3.1e+00	0.00	
AVGASA	10/ 11	-4.6e+00	0.00		DEGENLPB	25/ 21	-3.1e+01	0.00	
AVGASB	10/ 11	-4.5e+00	0.00		DEGENQPC	24/ 27	3.0e-09	126.20	
AVION2	3000/ 2949	9.5e+07	0.46	1	DEGENQP	-/-	-	-	2
BATCH	948/ 830	2.6e+05	0.78	3	DEGTRIDL	-/-	-	-	2
BDRY2	-/-	-	-	2	DEMOB7	344/ 309	1.7e+02	0.07	3
BIGBANK	211/ 212	-4.2e+06	25.04		DEMYMALO	25/ 24	-3.0e+00	0.00	
BIGGSC4	14/ 15	-2.4e+01	0.00		DIPIGRI	35/ 33	6.8e+02	0.00	
BLOCKQP1	-/-	-	-	2	DISC2	69/ 63	1.6e+00	0.03	
BLOCKQP2	-/-	-	-	2	DISCS	176/ 164	1.4e+01	0.36	
BLOCKQP3	-/-	-	-	2	DITPERT	3000/ 3001	-2.0e+00	3848.79	1
BLOCKQP4	-/-	-	-	2	DIXCHLNV	-/-	-	-	2
BLOCKQP5	-/-	-	-	2	DNIEPER	40/ 34	1.9e+04	0.01	3
BLOWEYA	-/-	-	-	2	DRUGDISE	3000/ 2887	1.5e+03	310.33	1
BLOWEYB	-/-	-	-	2	DRUGDIS	378/ 378	4.3e+00	1714.32	
BLOWEYC	-/-	-	-	2	DUAL1	6/ 7	3.5e-02	0.03	
BRAINPC0	86/ 90	1.5e-03	132.31		DUAL2	6/ 7	3.4e-02	0.03	
BRAINPC1	1005/ 979	9.9e-10	1702.64		DUAL3	7/ 9	1.4e-01	0.06	
BRAINPC2	258/ 256	4.1e-08	2373.24		DUAL4	7/ 8	7.5e-01	0.03	
BRAINPC3	-/-	-	-	2	DUALC1	30/ 24	6.2e+03	0.07	
BRAINPC4	314/ 298	1.3e-03	441.54	3	DUALC2	144/ 139	3.6e+03	0.30	
BRAINPC5	3000/ 2977	1.4e-03	4242.98	1	DUALC5	33/ 29	4.3e+02	0.14	
BRAINPC6	2093/ 2094	5.9e-05	938.49		DUALC8	63/ 59	1.8e+04	0.55	3
BRAINPC7	2/ 2	-2.2e+22	2.22	2	EG3	-/-	-	-	2
BRAINPC8	185/ 182	1.7e-04	264.84		EIGENA	64/ 58	2.1e-27	7.56	
BRAINPC9	165/ 169	8.2e-04	246.72		EIGMAXA	8/ 10	-1.0e+00	0.02	
BRIDGEND	774/ 748	5.4e+01	268.31		EIGMAXB	42/ 40	-9.6e-01	0.17	
BRITGAS	60/ 56	0.0e+00	0.37		EIGMINA	9/ 10	1.0e+00	0.02	
BT13	20/ 17	0.0e+00	0.00		EIGMINB	194/ 182	9.7e-04	0.55	
BTS4	151/ 134	6.9e+07	100.74	3	ELATTAR	3000/ 3001	-5.5e+13	1.02	1
BURKEHAN	9/ 10	-5.0e-10	0.00	8	EQC	1/ 2	-8.3e+02	0.00	
CAMSHAPE	3000/ 2963	-4.3e+00	492.64	1	ERRINBAR	456/ 431	2.8e+01	0.10	3
CANTILVR	27/ 28	1.3e+00	0.00		EXPFITA	35/ 36	1.1e-03	0.01	
CAR2	3000/ 3001	1.0e+00	73.81	1	EXPFITB	49/ 49	5.0e-03	0.07	
CATMIX	129/ 127	-4.8e-02	36.33		EXPFITC	79/ 78	2.3e-02	0.65	
CB2	17/ 18	2.0e+00	0.00		EXTRASIM	2/ 3	1.0e+00	0.00	
CB3	18/ 19	2.0e+00	0.00		FCCU	9/ 10	1.1e+01	0.00	
CBS	30/ 29	5.4e+06	88.04	3	FEEDLOC	3000/ 2660	4.9e-04	14.74	1
CHACONN1	11/ 12	2.0e+00	0.00		FLETCHER	34/ 32	2.0e+01	0.00	
CHACONN2	17/ 18	2.0e+00	0.00		GASOIL	3000/ 2722	3.6e-02	3416.38	1
CHANDHEQ	25/ 26	3.8e-16	1.97		GAUSSELM	1276/ 555	-1.1e+01	15.88	
CHEMRCCTA	1768/ 1752	5.2e-06	271.45	3	GIGOMEZ1	32/ 30	-3.0e+00	0.00	
CHEMRCCTB	1053/ 1038	1.3e-06	29.33	3	GIGOMEZ2	18/ 19	2.0e+00	0.00	
CLNLBEAM	2670/ 2665	3.4e+02	380.01	3	GIGOMEZ3	20/ 19	2.0e+00	0.00	
CONCON	111/ 100	-6.2e+03	0.01	3	GILBERT	34/ 35	2.5e+03	5253.69	

# Annexe E. Résultats numériques de LANCELOT

Problème	#f/ #g	f	CPU	e	Problème	#f/ #g	f	CPU	e
GLIDER	3000/ 2798	-3.1e+04	669.63	1	LISWET2	80/ 77	5.0e+00	5.33	3
GMNCASE1	33/ 34	2.7e-01	14.00		LISWET3	45/ 43	5.0e+00	1.43	3
GMNCASE2	36/ 36	-9.9e-01	21.95		LISWET4	51/ 49	5.0e+00	1.47	3
GMNCASE3	35/ 37	1.5e+00	21.05		LISWET5	56/ 50	5.0e+00	1.65	3
GMNCASE4	33/ 33	5.9e+03	9.70	3	LISWET6	52/ 51	5.0e+00	1.46	3
GOFFIN	5/ 6	-4.0e-16	0.04		LISWET7	54/ 45	1.0e+02	1.18	3
GOULDQP1	18/ 18	-3.5e+03	0.00	3	LISWET8	162/ 154	1.4e+02	104.47	3
GOULDQP2	22/ 23	1.6e-12	12.36		LISWET9	237/ 228	3.9e+02	356.38	3
GOULDQP3	11/ 16	2.4e-05	0.90		LOADBAL	83/ 81	4.5e-01	0.04	
GPP	-/-	-	-	2	LOOTSMA	11/ 9	0.0e+00	0.00	8
GRIDNETA	63/ 62	4.8e+02	9.92		LOTSCHD	7/ 8	2.4e+03	0.00	
GRIDNETC	53/ 54	1.6e+02	15.53		LSNNODOC	11/ 12	1.2e+02	0.00	
GRIDNETD	64/ 63	5.7e+02	10.84		LSQFIT	10/ 11	3.4e-02	0.00	
GRIDNETF	52/ 53	2.4e+02	16.79		LUKVLI10	98/ 73	3.5e+03	307.28	
GRIDNETG	61/ 60	6.2e+02	13.25		LUKVLI11	118/ 116	1.7e-11	943.67	
GRIDNETI	50/ 49	2.4e+02	16.59		LUKVLI12	3000/ 2699	9.1e-01	813.52	1
HADAMARD	905/ 891	1.1e+00	418.65		LUKVLI13	47/ 44	1.3e+02	27.30	
HAGER4	103/ 94	2.8e+00	27.94	3	LUKVLI14	1549/ 1449	1.6e+04	736.55	
HAIFAL	-/-	-	-	2	LUKVLI15	-/-	-	-	2
HAIFAM	3000/ 2956	-4.5e+01	24.48	1	LUKVLI16	118/ 108	3.0e+03	90.26	
HAIFAS	34/ 32	-4.5e-01	0.00		LUKVLI17	140/ 114	7.8e+02	63.31	
HALDMADS	77/ 73	1.2e-04	0.03		LUKVLI18	69/ 68	2.4e-15	393.78	
HANGING	222/ 203	-3.1e+04	69.33		LUKVLI1	3000/ 2937	8.4e+03	621.60	1
HATFLDH	11/ 12	-2.4e+01	0.00		LUKVLI3	30/ 29	1.2e+01	0.58	
HELSEBY	491/ 480	3.2e+01	46.85		LUKVLI4	115/ 102	-3.5e+05	76.99	
HET-Z	125/ 117	1.0e+00	2.43		LUKVLI5	77/ 71	5.3e-01	555.21	
HIE1372D	47/ 46	8.1e+05	0.65		LUKVLI6	32/ 33	6.3e+05	26.10	
HIMMELBI	24/ 25	-1.7e+03	0.05		LUKVLI7	174/ 158	-2.2e+03	1.79	3
HIMMELBJ	174/ 176	-1.9e+03	0.14		LUKVLI8	369/ 341	8.3e+05	1889.03	3
HIMMELBK	98/ 90	5.2e-02	0.04		LUKVLI9	263/ 239	1.0e+03	2.94	
HIMMELP2	278/ 258	-8.2e+00	0.01	3	MADSEN	23/ 24	6.2e-01	0.00	
HIMMELP3	105/ 102	-5.9e+01	0.01		MADSSCHJ	-/-	-	-	2
HIMMELP4	167/ 155	-5.9e+01	0.01		MAKELA1	19/ 19	-1.4e+00	0.00	
HIMMELP5	182/ 169	-5.9e+01	0.01	3	MAKELA2	13/ 14	7.2e+00	0.00	
HIMMELP6	203/ 189	-5.9e+01	0.01	3	MAKELA3	56/ 51	2.7e-12	0.01	
HONG	21/ 23	2.3e+01	0.00		MAKELA4	6/ 8	1.7e-19	0.00	
HUBFIT	10/ 11	1.7e-02	0.00		MANNE	3000/ 2036	-9.7e-01	190.34	1
HUES-MOD	-/-	-	-	2	MARINE	1101/ 1030	2.0e+07	2939.57	
HUESTIS	-/-	-	-	2	MATRIX2	12/ 13	5.3e-25	0.00	
HVYCRASH	3000/ 2651	-6.9e-02	77.68	1	MCONCON	114/ 102	-6.2e+03	0.01	3
HYDROELL	134/ 135	-3.6e+06	1.95		METHANOL	2536/ 2390	9.0e-03	3102.12	
HYDROELM	72/ 73	-3.6e+06	0.63		MIFFLIN1	22/ 22	-1.0e+00	0.00	
HYDROELS	29/ 30	-3.6e+06	0.06		MIFFLIN2	36/ 35	-1.0e+00	0.00	
JANNSON3	-/-	-	-	2	MINC44	452/ 431	3.8e-04	59.56	
JANNSON4	-/-	-	-	2	MINMAXBD	219/ 199	1.2e+02	0.08	
JJTABEL3	3000/ 3001	1.3e+14	32.38	1	MINMAXRB	69/ 65	-1.8e-16	0.00	
KISSING2	168/ 162	6.8e+00	10.35		MINPERM	52/ 49	3.6e-04	5.83	
KISSING	589/ 575	8.5e-01	54.69	3	MISTAKE	29/ 28	-1.0e+00	0.01	
KIWCRESC	19/ 20	1.8e-10	0.00		MOSARQP1	26/ 27	-3.8e+03	1.47	
KSIP	96/ 92	5.8e-01	7.06	3	MOSARQP2	19/ 14	-5.1e+03	0.71	
LAKES	398/ 344	3.5e+05	0.31	3	MPC10	-/-	-	-	2
LAUNCH	2607/ 2556	9.0e+00	1.07		MPC11	-/-	-	-	2
LEAKNET	282/ 278	8.0e+00	0.47		MPC12	-/-	-	-	2
LEUVEN1	-/-	-	-	2	MPC13	-/-	-	-	2
LEUVEN2	-/-	-	-	2	MPC14	-/-	-	-	2
LEUVEN3	-/-	-	-	2	MPC15	-/-	-	-	2
LEUVEN4	-/-	-	-	2	MPC16	-/-	-	-	2
LEUVEN5	-/-	-	-	2	MPC1	-/-	-	-	2
LEUVEN6	-/-	-	-	2	MPC2	-/-	-	-	2
LEUVEN7	58/ 60	6.9e+02	24.57	3	MPC3	-/-	-	-	2
LIN	17/ 18	-2.0e-02	0.00		MPC4	-/-	-	-	2
LINSPANH	9/ 12	-7.7e+01	0.00		MPC5	-/-	-	-	2
LIPPERT1	294/ 246	-1.0e-02	4118.07	8	MPC6	-/-	-	-	2
LIPPERT2	-/-	-	-	2	MPC7	-/-	-	-	2
LISWET10	135/ 127	9.9e+00	80.27	3	MPC8	-/-	-	-	2
LISWET11	100/ 90	9.9e+00	24.58	3	MPC9	-/-	-	-	2
LISWET12	258/ 245	3.5e+02	312.24	3	MRIBASIS	126/ 114	1.8e+01	0.21	8
LISWET1	52/ 42	7.2e+00	1.09	3	NASH	6/ 4	0.0e+00	0.00	8

# Annexe E. Résultats numériques de LANCELOT

Problème	#f/ #g	f	CPU	e	Problème	#f/ #g	f	CPU	e
NCVXQP1	53/ 45	-3.4e+03	0.00		QPCBLEND	62/ 61	-7.8e-03	0.11	3
NCVXQP2	54/ 39	-2.7e+03	0.00		QPCBOEI1	3000/ 2999	1.2e+07	1881.50	1
NCVXQP3	43/ 34	-2.5e+03	0.00		QPCBOEI2	289/ 281	8.2e+06	3.40	3
NCVXQP4	44/ 30	-5.6e+03	0.00		QPCSTAIR	98/ 102	6.2e+06	3.82	
NCVXQP5	41/ 31	-3.6e+03	0.00		QPNBAND	-/-	-	-	2
NCVXQP6	94/ 60	-3.0e+03	0.01		QPNBLEND	72/ 71	-9.1e-03	0.15	3
NCVXQP7	67/ 50	-3.0e+03	0.00		QPNBOEI1	3000/ 2998	6.8e+06	1789.79	1
NCVXQP8	71/ 53	-2.4e+03	0.01		QPNBOEI2	391/ 381	1.4e+06	7.72	3
NCVXQP9	9/ 9	-2.3e+03	0.00		QPNSTAIR	103/ 106	5.1e+06	4.26	3
NET1	68/ 61	9.4e+05	0.02	3	QR3D	375/ 344	1.9e-16	192.33	
NET2	77/ 71	1.2e+06	0.06	3	RDW2D52F	3000/ 2994	5.8e-01	2.16	1
NET3	287/ 263	5.9e+06	3.31	3	READING1	3000/ 2865	-4.7e-02	108.70	1
NET4	-/-	-	-	2	READING2	2142/ 2148	-1.3e-02	31.27	
NGONE	3000/ 2979	-6.4e-01	554.21	1	READING3	3000/ 2869	-6.3e-02	136.62	1
NUFFIELD	3000/ 2642	-4.7e-04	165.08	1	READING4	-/-	-	-	2
ODFITS	13/ 14	-2.4e+03	0.00		READING5	218/ 182	-5.0e-15	3.37	
OET1	63/ 61	5.4e-01	1.45		READING6	3000/ 2254	-5.7e+28	1.09	1
OET2	100/ 97	8.7e-02	2.43		READING7	3000/ 3000	-4.8e+42	430.60	1
OET3	68/ 65	4.5e-03	1.67		READING8	-/-	-	-	2
OET4	112/ 103	4.3e-03	2.91		READING9	3000/ 3001	-9.8e+39	44.21	1
OET5	759/ 730	2.7e-03	22.30		RES	3/ 4	1.6e-30	0.00	
OET6	602/ 575	2.1e-03	23.01		RK23	65/ 62	8.3e-02	0.01	
OET7	3000/ 2896	-4.2e+13	90.58	1	ROBOTARM	3000/ 2555	4.0e+22	4063.98	1
OPTCDEG2	449/ 446	2.3e+02	99.66		ROBOT	63/ 60	5.5e+00	0.00	
OPTCDEG3	283/ 284	4.6e+01	55.31		ROCKET	3000/ 2651	-1.1e+00	1247.75	1
OPTCNTRL	23/ 24	5.5e+02	0.00		ROSENNMX	68/ 63	-4.4e+01	0.00	
OPTMASS	3000/ 2953	-1.0e+40	184.47	1	ROTDISC	3000/ 2873	9.2e+00	644.24	1
OPTPRLOC	969/ 930	-1.6e+01	0.74	3	S268	3/ 4	-2.9e-11	0.00	
ORBIT2	3000/ 3001	2.0e+04	143.88	1	S277-280	21/ 22	5.1e+00	0.00	
ORTHREGE	-/-	-	-	2	SAROMM	3000/ 3001	-1.0e+20	26.98	1
ORTHREGEF	133/ 122	8.5e+01	94.54		SARO	3000/ 3001	-2.6e+07	179.43	1
OSORIO	16/ 19	1.1e+01	47.74		SAWPATH	3000/ 2924	1.9e+38	103.03	1
PDE1	-/-	-	-	2	SEMICON1	773/ 748	4.3e-16	6.54	
PDE2	-/-	-	-	2	SEMICON2	168/ 167	8.3e-12	1.55	
PENTAGON	12/ 13	1.5e-04	0.00		SIMPLLLPA	4/ 5	1.0e+00	0.00	
PFIT1	270/ 260	4.3e-19	0.01		SIMPLLLPB	5/ 6	1.1e+00	0.00	
PFIT2	288/ 276	1.7e-27	0.01		SINROSNB	3000/ 2969	1.9e-10	11.33	1
PFIT3	30/ 28	1.6e-27	0.00		SIPOW1M	61/ 60	-1.0e+00	4.04	
PFIT4	110/ 104	1.1e-22	0.01		SIPOW1	82/ 82	-1.0e+00	5.29	
PINENE	218/ 206	2.0e+01	306.97		SIPOW2M	68/ 68	-1.0e+00	4.27	
POLAK1	28/ 27	2.7e+00	0.00		SIPOW2	67/ 65	-1.0e+00	4.24	
POLAK2	17/ 18	5.5e+01	0.00		SIPOW3	51/ 48	5.3e-01	3.85	
POLAK3	76/ 70	5.9e+00	0.02		SIPOW4	64/ 64	2.7e-01	4.84	
POLAK4	20/ 14	1.1e-11	0.00		SMBANK	263/ 264	-7.1e+06	0.40	
POLAK5	164/ 151	5.0e+01	0.01		SMMPSF	1243/ 1157	1.0e+06	30.85	3
POLAK6	67/ 63	-4.4e+01	0.01		SNAKE	3000/ 2721	-1.2e+03	0.15	1
POLYGON	328/ 321	-7.9e-01	151.37		SOSQP1	2/ 3	1.2e-10	2178.55	
PORTFL1	14/ 15	2.0e-02	0.00		SOSQP2	10/ 9	-1.2e+03	2653.31	3
PORTFL2	15/ 16	3.0e-02	0.00		SPIRAL	86/ 84	2.1e-11	0.00	
PORTFL3	12/ 13	3.3e-02	0.00		SREADIN3	3000/ 2885	-1.5e-01	126.73	1
PORTFL4	11/ 12	2.6e-02	0.00		SSEBLIN	22/ 22	1.6e+07	0.02	
PORTFL6	12/ 13	2.6e-02	0.00		SSEBNLN	209/ 209	1.6e+07	0.07	
PORTSNQP	-/-	-	-	2	SSNLBEAM	1050/ 1037	3.4e+02	91.63	3
PORTSQP	-/-	-	-	2	STANCMIN	11/ 12	4.2e+00	0.00	
POWELL20	205/ 187	6.5e+09	40.98	3	STCQP1	26/ 25	3.7e+05	4.86	
PRIMAL1	12/ 13	-3.5e-02	0.92		STCQP2	29/ 28	3.7e+04	3.20	
PRIMAL2	13/ 16	-3.4e-02	2.83		STEENBRA	14/ 16	1.7e+04	0.07	
PRIMAL3	16/ 17	-1.4e-01	27.54		STEENBRB	116/ 117	9.1e+03	0.15	
PRIMAL4	23/ 24	-7.5e-01	56.16		STEENBRC	139/ 136	2.8e+04	0.23	
PRIMALC1	29/ 22	-6.2e+03	0.02	3	STEENBRD	116/ 117	9.4e+03	0.16	
PRIMALC2	28/ 23	-3.6e+03	0.01	3	STEENBRE	3000/ 2988	2.8e+04	1.52	1
PRIMALC5	18/ 17	-4.3e+02	0.01	3	STEENBRF	140/ 137	9.0e+03	0.17	
PRIMALC8	37/ 33	-1.8e+04	0.03	3	STEENBRG	160/ 154	2.8e+04	0.27	
PRODPL0	53/ 48	5.9e+01	0.02		STEERING	604/ 577	5.5e-01	190.48	
PRODPL1	73/ 67	3.6e+01	0.04	3	STNQP1	24/ 23	-3.1e+05	7.50	3
PT	58/ 55	1.8e-01	0.31		STNQP2	24/ 23	-5.7e+05	7.74	3
QC	1/ 2	-9.6e+02	0.00		SUPERSIM	9/ 10	6.7e-01	0.00	
QPBAND	7/ 8	-5.0e+04	1000.44		SVANBERG	92/ 84	8.4e+03	61.10	

# Annexe E. Résultats numériques de LANCELOT

Problème	#f/ #g	f	CPU	e	Problème	#f/ #g	f	CPU	e
SWOPF	119/ 112	6.8e−02	0.24		TRO6X2	210/ 199	−1.0e+20	0.10	8
SYNTHE1	15/ 16	7.6e−01	0.00		TRUSPYR1	635/ 563	1.1e+01	0.10	3
SYNTHE2	24/ 24	−5.5e−01	0.00		TRUSPYR2	608/ 543	1.1e+01	0.10	3
SYNTHE3	24/ 24	1.5e+01	0.01	3	TRY-B	15/ 16	1.0e+00	0.00	
TABLE1	3000/ 3001	2.8e+12	74.62	1	TWIRIBG1	−/ −	−	−	2
TABLE3	92/ 90	2.9e+09	23.45	3	TWIRIMD1	504/ 502	−1.0e+00	424.84	3
TABLE4	92/ 90	2.9e+09	23.47	3	TWIRISM1	223/ 217	−1.0e+00	6.39	3
TABLE5	92/ 90	2.9e+09	23.43	3	TWOBARS	17/ 18	1.5e+00	0.00	
TABLE6	3000/ 3001	2.8e+12	74.53	1	TWOD	−/ −	−	−	2
TABLE7	55/ 54	7.8e+08	0.72	3	UBH1	−/ −	−	−	2
TABLE8	12/ 13	1.9e+02	0.57		UBH5	−/ −	−	−	2
TAME	1/ 2	0.0e+00	0.00		VANDERM1	127/ 116	1.9e−12	12.36	
TARGUS	44/ 43	1.7e+07	0.08	3	VANDERM2	127/ 116	1.9e−12	12.37	
TENBARS1	374/ 337	2.3e+03	0.08		VANDERM3	3000/ 3001	Inf	133.84	1
TENBARS2	275/ 248	2.3e+03	0.06	3	WACHBIEG	18/ 18	1.0e+00	0.00	
TENBARS3	187/ 172	2.2e+03	0.04	3	WATER	24/ 25	1.1e+04	0.00	
TENBARS4	1122/ 1019	3.7e+02	0.25	3	WOMFLET	52/ 51	2.7e−14	0.00	
TFI1	66/ 63	5.3e+00	0.04		YAO	190/ 179	2.0e+02	278.80	3
TFI2	34/ 35	6.5e−01	0.02		YORKNET	234/ 219	1.2e+04	0.91	8
TFI3	48/ 46	4.3e+00	0.03	3	ZAMB2-10	177/ 175	−1.6e+00	1.01	
TOYSARAH	3000/ 3001	5.9e+19	43.76	1	ZAMB2-11	64/ 66	−1.1e+00	0.35	
TRAINF	89/ 90	3.1e+00	12.38		ZAMB2-8	56/ 56	−1.5e−01	0.10	
TRAINH	1045/ 961	1.2e+01	230.24	3	ZAMB2-9	73/ 75	−3.5e−01	0.20	
TRIMLOSS	471/ 452	9.1e+00	5.13	3	ZAMB2	65/ 68	−1.1e+01	31.67	
TRO11X3	3000/ 2173	7.4e+19	3.79	1	ZECEVIC2	5/ 6	−4.1e+00	0.00	
TRO21X5	3000/ 2278	6.4e+19	70.12	1	ZECEVIC3	21/ 21	9.7e+01	0.00	
TRO3X3	416/ 393	−1.0e+20	0.11	8	ZECEVIC4	12/ 13	7.6e+00	0.00	
TRO41X9	−/ −	−	−	2	ZIGZAG	87/ 81	8.6e+01	15.00	
TRO4X4	470/ 432	−1.0e+20	0.41	8	ZY2	10/ 11	2.0e+00	0.00	
TRO5X5	3000/ 2229	−9.1e+19	2.98	1					

# Annexe E. Résultats numériques de LANCELOT

TABLE E.5 – Résultats de LANCELOT-A sur des problèmes dégénérés de COPS et CUTer

Problème	#f/ #g	f	CPU	e	Problème	#f/ #g	f	CPU	e
aug3d	28/ 20	5.5e+02	0.53	3	hs052	8/ 8	5.3e+00	0.00	
aug3dc	37/ 21	7.7e+02	0.50		hs061	23/ 21	-1.4e+02	0.00	
bt01	24/ 20	-1.0e+00	0.00		hs077	34/ 28	2.4e-01	0.00	
bt02	36/ 32	3.3e-02	0.00		hs078	18/ 16	-2.9e+00	0.00	
bt03	7/ 7	4.1e+00	0.00		hs079	15/ 15	7.9e-02	0.00	
bt04	31/ 29	-4.6e+01	0.00		hs100lnp	63/ 53	6.8e+02	0.00	
bt05	19/ 17	9.6e+02	0.00		lukvle01	29/ 25	6.2e+00	0.07	
bt06	28/ 23	2.8e-01	0.00	3	lukvle02	60/ 42	2.8e+04	0.32	3
bt07	48/ 45	3.1e+02	0.00		lukvle03	24/ 24	1.4e+01	0.03	
bt08	37/ 33	1.0e+00	0.00		lukvle04	64/ 41	4.8e+03	0.13	
bt09	26/ 26	-1.0e+00	0.00		lukvle05	103/ 89	4.1e+00	0.24	
bt11	23/ 22	8.2e-01	0.00		lukvle06	86/ 37	6.3e+04	0.28	3
bt12	11/ 11	6.2e+00	0.00		lukvle07	73/ 65	-1.1e+03	0.06	
byrdsphr	33/ 30	-4.7e+00	0.00		lukvle08	129/ 92	-9.8e+04	0.27	3
catena	158/ 95	-2.1e+06	1.17	3	lukvle09	69/ 58	1.0e+02	0.04	
chain1	3001/ 2478	-6.2e+05	2.76	1	lukvle10	59/ 38	3.6e+02	0.08	
chain2	3001/ 2474	-6.6e+05	5.17	1	lukvle11	111/ 90	6.6e-18	0.14	
chain3	3001/ 2479	-4.1e+05	9.21	1	lukvle12	80/ 65	1.5e+03	0.11	3
dixchlng	52/ 44	1.4e-13	0.00		lukvle13	119/ 97	3.1e+03	0.61	
dtoc1na	17/ 17	1.3e+01	0.91		lukvle14	99/ 78	5.2e+03	0.17	
dtoc1nb	20/ 20	1.6e+01	1.00		lukvle15	42/ 34	1.1e-18	0.05	
dtoc1nc	36/ 32	2.5e+01	1.66		lukvle16	38/ 31	3.5e+01	0.05	
dtoc1nd	63/ 54	1.3e+01	2.27		lukvle17	63/ 31	1.0e+03	0.07	3
dtoc2	14/ 14	4.7e-01	0.09		lukvle18	38/ 30	1.0e+03	0.04	
dtoc5	65/ 57	1.5e+00	0.85		maratos	10/ 10	-1.0e+00	0.00	
dtoc6	280/ 200	1.3e+05	36.99	3	mwright	22/ 21	2.5e+01	0.00	
eigena2	16/ 13	1.5e-29	0.01		orthrdm2	158/ 120	1.6e+02	2.11	3
eigenaco	31/ 30	4.9e-18	0.03		orthrega	267/ 232	1.4e+03	0.40	3
eigenb2	89/ 73	3.8e-16	0.06		orthregb	503/ 423	3.4e-18	0.05	
eigenbco	159/ 136	2.4e-16	0.20		orthregc	75/ 57	1.9e+02	3.03	
eigenc2	1238/ 1043	6.5e-18	7.39		orthregd	324/ 265	2.5e+03	15.79	4
eigencco	27/ 25	2.0e-18	0.01		orthrgdm	91/ 78	1.5e+03	3.39	3
elec1	52/ 43	1.1e+03	0.23		orthrgds	339/ 293	2.6e+03	16.12	4
elec2	88/ 71	4.4e+03	1.98		robot	27/ 25	5.5e+00	0.00	
elec3	175/ 106	1.8e+04	28.41	3	s216	19/ 16	1.0e+00	0.00	
gilbert	37/ 37	4.8e+02	0.24		s219	33/ 33	-1.0e+00	0.00	
gridnetb	42/ 42	1.4e+02	17.83		s235	33/ 30	4.0e-02	0.00	
hager1	30/ 30	8.8e-01	0.29	3	s269	7/ 7	4.1e+00	0.00	
hager2	85/ 85	4.3e-01	1.09	3	s316	24/ 24	3.3e+02	0.00	
hager3	95/ 95	1.4e-01	1.76	3	s317	27/ 27	3.7e+02	0.00	
hs006	83/ 70	1.0e-16	0.00		s318	28/ 28	4.1e+02	0.00	
hs007	32/ 28	-1.7e+00	0.00		s319	28/ 28	4.5e+02	0.00	
hs009	14/ 14	-5.0e-01	0.00		s320	32/ 31	4.9e+02	0.00	
hs026	56/ 52	1.6e-12	0.00		s321	33/ 32	5.0e+02	0.00	
hs027	33/ 30	4.0e-02	0.00		s322	40/ 38	5.0e+02	0.00	
hs028	4/ 4	2.7e-26	0.00		s335	38/ 38	-4.5e-03	0.00	
hs039	26/ 26	-1.0e+00	0.00		s336	34/ 30	-3.4e-01	0.00	3
hs040	12/ 12	-2.5e-01	0.00		s338	24/ 22	-7.2e+00	0.00	
hs046	38/ 37	4.8e-14	0.00		s344	30/ 26	3.3e-02	0.00	
hs047	58/ 56	2.5e-16	0.00		s345	36/ 31	3.3e-02	0.00	
hs048	3/ 3	5.7e-31	0.00		s375	40/ 38	-1.5e+01	0.00	
hs049	65/ 65	2.7e-12	0.00		s378	49/ 47	-4.8e+01	0.00	
hs050	14/ 14	9.1e-18	0.00		s394	36/ 33	1.9e+00	0.00	
hs051	14/ 14	1.9e-17	0.00		s395	35/ 32	1.9e+00	0.00	

# Annexe E. Résultats numériques de LANCELOT

TABLE E.6 – Résultats de LANCELOT-A sur des problèmes de la collection MacMPEC

Problème	#f/#g	f	CPU	e	Problème	#f/#g	f	CPU	e
bar-truss-3	3001/2725	7.7e+00	0.39	1	gauvin	3/3	1.1e−26	0.00	
bard1	14/14	2.0e+00	0.00		hs044-i	14/14	6.2e−06	0.00	
bard1m	10/10	2.0e+00	0.00		incid-set1-8	74/65	8.7e−09	0.27	
bard2	13/13	6.6e+03	0.00		incid-set1c-8	52/46	−0.0e+00	0.23	3
bard2m	13/13	−6.6e+03	0.00		incid-set2-8	517/472	4.5e−03	4.27	
bard3	25/23	−1.3e+01	0.00		incid-set2c-8	249/230	5.5e−03	1.31	
bard3m	20/18	−1.6e+01	0.00		jr1	11/11	5.0e−01	0.00	
bilevel1	14/14	−3.0e+01	0.00		jr2	4/4	7.7e−34	0.00	
bilevel2	21/21	−6.6e+03	0.00		kth1	7/7	−8.7e−18	0.00	
bilevel3	17/17	−1.6e+01	0.00		kth2	4/4	1.2e−32	0.00	
bilin	6/6	5.8e+01	0.00		kth3	1/1	0.0e+00	0.00	
dempe	544/480	1.6e+01	0.01	3	nash1	3/3	2.5e−27	0.00	
design-cent-1	3001/2716	8.5e+07	0.20	1	nash1a	3/3	2.5e−27	0.00	
design-cent-2	3001/2896	1.3e+30	0.12	1	outrata31	27/24	2.6e+00	0.00	
design-cent-4	3001/2998	2.1e+45	0.12	1	outrata32	32/27	2.6e+00	0.00	
design-init-1	1/1	0.0e+00	0.00		outrata33	22/20	2.7e+00	0.00	
design-init-2	1/1	0.0e+00	0.00		outrata34	38/33	2.6e+00	0.00	
design-init-3	1/1	0.0e+00	0.00		pack-comp1-8	32/30	6.0e−01	0.10	
design-init-4	1/1	0.0e+00	0.00		pack-comp1c-8	33/31	6.0e−01	0.11	
desilva	13/13	−1.0e+00	0.00		pack-comp2c-8	146/138	6.7e−01	0.72	3
df1	21/21	4.5e−18	0.00		pack-rig1-8	118/111	7.9e−01	0.18	
ex9.1.1	6/6	−1.3e+01	0.00		pack-rig1c-8	118/108	7.9e−01	0.19	
ex9.1.10	6/6	−3.2e+00	0.00		pack-rig1p-8	134/106	7.9e−01	0.21	3
ex9.1.2	4/4	−6.2e+00	0.00		pack-rig2-8	178/163	7.8e−01	0.29	3
ex9.1.3	16/16	−5.8e+01	0.00		pack-rig2c-8	162/150	8.0e−01	0.27	3
ex9.1.4	4/4	−3.7e+01	0.00		pack-rig2p-8	213/160	7.8e−01	0.32	3
ex9.1.5	12/12	−1.0e+00	0.00		portfl-i-1	19/19	5.0e−17	0.01	
ex9.1.6	16/16	−5.2e+01	0.00		qpec1	3/3	8.0e+01	0.00	
ex9.1.7	9/9	−5.0e+01	0.00		qpec2	12/12	2.1e−16	0.00	
ex9.1.8	6/6	−3.2e+00	0.00		ralphmod	3008/2944	−6.8e+02	247.10	1
ex9.1.9	17/17	2.0e+00	0.00		scholtes1	6/6	2.0e+00	0.00	
ex9.2.1	14/14	2.0e+00	0.00		scholtes2	10/10	1.5e+01	0.00	
ex9.2.2	14/14	5.0e+01	0.00		scholtes3	5/5	0.0e+00	0.00	
ex9.2.3	11/11	5.0e+00	0.00		scholtes5	10/10	1.0e+00	0.00	
ex9.2.4	5/5	1.3e−30	0.00		sl1	25/25	1.0e−04	0.00	
ex9.2.5	4/4	3.4e−29	0.00		stackelberg1	7/7	−3.3e+03	0.00	
ex9.2.6	14/14	−1.5e+00	0.00		tap-09	67/65	1.1e+02	0.03	
ex9.2.7	14/14	2.0e+00	0.00		tap-15	47/45	1.8e+02	0.08	
ex9.2.8	6/6	1.0e+00	0.00		water-net	3001/2418	1.4e+02	0.36	1
ex9.2.9	3/3	2.0e+00	0.00						



# Bibliographie

- [1] I. Akrotirianakis and B. Rustem. A primal-dual interior point algorithm with an exact and differentiable merit function for nonlinear programming. *Optim. Methods Softw.*, 14(1-2) :1–36, 2000. International Conference on Nonlinear Programming and Variational Inequalities (Hong Kong, 1998). [8](#)
- [2] I. Akrotirianakis and B. Rustem. Globally convergent interior-point algorithm for nonlinear programming. *J. Optim. Theory Appl.*, 125(3) :497–521, 2005. [8](#)
- [3] P. R. Amestoy, I. S. Duff, J.-Y. L’Excellent, and J. Koster. A fully asynchronous multifrontal solver using distributed dynamic scheduling. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 23(1) :15–41 (electronic), 2001. [99](#)
- [4] R. Andreani, E. G. Birgin, J. M. Martínez, and M. L. Schuverdt. On augmented Lagrangian methods with general lower-level constraints. *SIAM J. Optim.*, 18(4) :1286–1309, 2007. [5](#), [27](#), [45](#), [59](#)
- [5] R. Andreani, E. G. Birgin, J. M. Martínez, and M. L. Schuverdt. Augmented Lagrangian methods under the constant positive linear dependence constraint qualification. *Math. Program.*, 111(1-2, Ser. B) :5–32, 2008. [5](#), [27](#), [45](#), [59](#)
- [6] M. Argáez and R. A. Tapia. On the global convergence of a modified augmented Lagrangian linesearch interior-point Newton method for nonlinear programming. *J. Optim. Theory Appl.*, 114(1) :1–25, 2002. [8](#)
- [7] P. Armand. A quasi-Newton penalty barrier method for convex minimization problems. *Comput. Optim. Appl.*, 26(1) :5–34, 2003. [9](#)
- [8] P. Armand and J. Benoist. A local convergence property of primal-dual methods for nonlinear programming. *Math. Program.*, 115(2, Ser. A) :199–222, 2008. [8](#), [75](#), [76](#), [78](#)
- [9] P. Armand and J. Benoist. Uniform boundedness of the inverse of a Jacobian matrix arising in regularized interior-point methods. *Math. Program.*, 137(1-2, Ser. A) :587–592, 2013. [58](#), [70](#)
- [10] P. Armand, J. Benoist, and J. P. Dussault. Local path-following property of inexact interior methods in nonlinear programming. *Comput. Optim. Appl.*, 52(1) :209–238, 2012. [8](#)
- [11] P. Armand, J. Benoist, R. Omheni, and V. Pateloup. Study of a primal-dual method for equality constrained minimization. *Comput. Optim. Appl.*, pages 1–29, 2014. [17](#), [30](#), [33](#), [35](#)
- [12] P. Armand, J. Benoist, and D. Orban. Dynamic updates of the barrier parameter in primal-dual methods for nonlinear programming. *Comput. Optim. Appl.*, 41(1) :1–25, 2008. [8](#), [61](#)



- [13] P. Armand, J. Benoist, and D. Orban. From global to local convergence of interior methods for nonlinear optimization. *Optimization Methods and Software*, 28(5) :1051–1080, 2013. [8](#), [18](#), [41](#), [42](#), [57](#), [70](#), [74](#), [75](#), [76](#), [79](#), [80](#), [83](#)
- [14] P. Armand and R. Omheni. A globally and quadratically convergent primal-dual augmented lagrangian algorithm for equality constrained optimization. *Submitted*, 2014. [25](#)
- [15] P. Armand and R. Omheni. A mixed logarithmic barrier-augmented lagrangian algorithm for constrained optimization. *En préparation*, 2014. [53](#)
- [16] A. Benchakroun, J. P. Dussault, and A. Mansouri. A two parameter mixed interior-exterior penalty algorithm. *ZOR—Math. Methods Oper. Res.*, 41(1) :25–55, 1995. [9](#), [13](#), [59](#)
- [17] H. Y. Benson, D. F. Shanno, and R. J. Vanderbei. Interior-point methods for non-convex nonlinear programming : jamming and numerical testing. *Math. Program.*, 99(1, Ser. A) :35–48, 2004. [8](#)
- [18] D. P. Bertsekas. Combined primal-dual and penalty methods for constrained minimization. *SIAM J. Control*, 13 :521–544, 1975. [4](#)
- [19] D. P. Bertsekas. On penalty and multiplier methods for constrained minimization. *SIAM J. Control Optimization*, 14(2) :216–235, 1976. [4](#)
- [20] D. P. Bertsekas. Approximation procedures based on the method of multipliers. *J. Optimization Theory Appl.*, 23(4) :487–510, 1977. [4](#)
- [21] D. P. Bertsekas. *Constrained optimization and Lagrange multiplier methods*. Computer Science and Applied Mathematics. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1982. [3](#), [4](#)
- [22] D. P. Bertsekas. Convergence rate of penalty and multiplier methods. In *Decision and Control including the 12th Symposium on Adaptive Processes, 1973 IEEE Conference on*, volume 12, pages 260–264, Dec. [4](#)
- [23] L. T. Biegler. *Nonlinear programming*, volume 10 of *MOS-SIAM Series on Optimization*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2010. Concepts, algorithms, and applications to chemical processes. [9](#)
- [24] E. G. Birgin, D. Fernández, and J. M. Martínez. The boundedness of penalty parameters in an augmented lagrangian method with constrained subproblems. *Optimization Methods Software*, 27(6) :1001–1024, Dec. 2012. [4](#)
- [25] P. T. Boggs and J. W. Tolle. A family of descent functions for constrained optimization. *SIAM J. Numer. Anal.*, 21(6) :1146–1161, 1984. [3](#)
- [26] E. Bousquet. *Optimisation non linéaire et application au réglage d’un réseau de télescopes*. PhD thesis, Université de Limoges, École Doctorale S2i, 2009. [21](#), [22](#)
- [27] M. G. Breitfeld and D. F. Shanno. Preliminary computational experience with modified log-barrier functions for large-scale nonlinear programming. In *Large scale optimization (Gainesville, FL, 1993)*, pages 45–67. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1994. [7](#), [59](#), [100](#)
- [28] M. G. Breitfeld and D. F. Shanno. Computational experience with penalty-barrier methods for nonlinear programming. *Ann. Oper. Res.*, 62 :439–463, 1996. Interior point methods in mathematical programming. [7](#), [100](#)

- [29] C. G. Broyden and N. F. Attia. A smooth sequential penalty function method for solving nonlinear programming problems. In *System modelling and optimization (Copenhagen, 1983)*, volume 59 of *Lecture Notes in Control and Inform. Sci.*, pages 237–245. Springer, Berlin, 1984. [2](#)
- [30] J. D. Buys. *Dual algorithms for constrained optimization problems*. Rijksuniversiteit te Leiden, Leiden, 1972. Doctoral dissertation, Faculty of Science, University of Leiden. [3](#), [4](#)
- [31] R. H. Byrd, J. C. Gilbert, and J. Nocedal. A trust region method based on interior point techniques for nonlinear programming. *Math. Program.*, 89(1, Ser. A) :149–185, 2000. [8](#), [59](#)
- [32] R. H. Byrd, M. E. Hribar, and J. Nocedal. An interior point algorithm for large-scale nonlinear programming. *SIAM J. Optim.*, 9(4) :877–900 (electronic), 1999. Dedicated to John E. Dennis, Jr., on his 60th birthday. [8](#)
- [33] R. H. Byrd, J. Nocedal, and R. A. Waltz. Feasible interior methods using slacks for nonlinear optimization. *Comput. Optim. Appl.*, 26(1) :35–61, 2003. [8](#), [59](#)
- [34] R. H. Byrd, J. Nocedal, and R. A. Waltz. KNITRO : An integrated package for nonlinear optimization. In *Large-scale nonlinear optimization*, volume 83 of *Nonconvex Optim. Appl.*, pages 35–59. Springer, New York, 2006. [9](#), [54](#)
- [35] R. H. Byrd, R. A. Tapia, and Y. Zhang. An SQP augmented Lagrangian BFGS algorithm for constrained optimization. *SIAM J. Optim.*, 2(2) :210–241, 1992. [4](#)
- [36] L. Chen and D. Goldfarb. Interior-point  $l_2$ -penalty methods for nonlinear programming with strong global convergence properties. *Math. Program.*, 108(1, Ser. A) :1–36, 2006. [8](#), [9](#), [59](#)
- [37] T. F. Coleman and C. Hempel. Computing a trust region step for a penalty function. *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, 11(1) :180–201, 1990. [2](#)
- [38] A. R. Conn, N. I. M. Gould, D. Orban, and P. L. Toint. A primal-dual trust-region algorithm for non-convex nonlinear programming. *Math. Program.*, 87(2, Ser. B) :215–249, 2000. Studies in algorithmic optimization. [8](#)
- [39] A. R. Conn, N. I. M. Gould, and P. L. Toint. A globally convergent augmented Lagrangian algorithm for optimization with general constraints and simple bounds. *SIAM J. Numer. Anal.*, 28(2) :545–572, 1991. [4](#)
- [40] A. R. Conn, N. I. M. Gould, and P. L. Toint. *LANCELOT : A Fortran package for large-scale nonlinear optimization (release A)*, volume 17 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1992. [5](#), [27](#), [45](#), [59](#)
- [41] A. R. Conn, N. I. M. Gould, and P. L. Toint. *Trust-region methods*. MPS/SIAM Series on Optimization. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2000. [8](#), [9](#)
- [42] R. Courant. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 49 :1–23, 1943. [2](#)
- [43] F. E. Curtis, H. Jiang, and D. P. Robinson. Adaptive Augmented Lagrangian Methods for Equality Constrained Optimization. Technical Report 12T-016, COR@L Laboratory, Department of ISE, Lehigh University, 2012. [5](#)

- 
- [44] F. E. Curtis, J. Nocedal, and A. Wächter. A matrix-free algorithm for equality constrained optimization problems with rank-deficient Jacobians. *SIAM J. Optim.*, 20(3) :1224–1249, 2009. [20](#)
  - [45] J. E. Cuthrell and L. T. Biegler. *Augmented Lagrangian Line Searches for Successive Quadratic Programming*. DRC. Design Research Center, Carnegie-Mellon University, 1982. [4](#)
  - [46] G. Debreu. Definite and semidefinite quadratic forms. *Econometrica*, 20 :295–300, 1952. [15](#)
  - [47] J. E. Dennis, M. Heinkenschloss, and L. N. Vicente. Trust-region interior-point SQP algorithms for a class of nonlinear programming problems. *SIAM J. Control Optim.*, 36(5) :1750–1794, 1998. [8](#)
  - [48] J. E. Dennis, Jr. and R. B. Schnabel. *Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations*. Prentice Hall Series in Computational Mathematics. Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1983. [40](#), [76](#)
  - [49] G. Di Pillo and L. Grippo. A new class of augmented Lagrangians in nonlinear programming. *SIAM J. Control Optim.*, 17(5) :618–628, 1979. [3](#), [4](#)
  - [50] G. Di Pillo and L. Grippo. A new augmented Lagrangian function for inequality constraints in nonlinear programming problems. *J. Optim. Theory Appl.*, 36(4) :495–519, 1982. [4](#)
  - [51] E. D. Dolan and J. J. Moré. Benchmarking optimization software with performance profiles. *Math. Program.*, 91(2, Ser. A) :201–213, 2002. [15](#), [20](#)
  - [52] E. D. Dolan, J. J. Moré, and T. S. Munson. Benchmarking optimization software with COPS 3.0. Technical report, Argonne National Laboratory, 2004. [20](#), [60](#), [103](#)
  - [53] I. S. Duff. Ma57—a code for the solution of sparse symmetric definite and indefinite systems. *ACM Trans. Math. Software*, 30 :118–144, 2004. [49](#), [99](#)
  - [54] J. P. Dussault and A. Elafia. On the superlinear convergence order of the logarithmic barrier algorithm. *Comput. Optim. Appl.*, 19(1) :31–53, 2001. [8](#)
  - [55] A. S. El-Bakry, R. A. Tapia, T. Tsuchiya, and Y. Zhang. On the formulation and theory of the Newton interior-point method for nonlinear programming. *J. Optim. Theory Appl.*, 89(3) :507–541, 1996. [8](#)
  - [56] D. Fernández and M. V. Solodov. Local convergence of exact and inexact augmented Lagrangian methods under the second-order sufficient optimality condition. *SIAM J. Optim.*, 22(2) :384–407, 2012. [4](#)
  - [57] A. V. Fiacco and G. P. McCormick. *Nonlinear programming : Sequential unconstrained minimization techniques*. John Wiley and Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1968. [2](#), [6](#), [13](#), [59](#)
  - [58] R. Fletcher. A class of methods for nonlinear programming with termination and convergence properties. In *Integer and nonlinear programming*, pages 157–175. North-Holland, Amsterdam, 1970. [3](#)
  - [59] R. Fletcher. *Practical methods of optimization*. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, second edition, 1987. [9](#)

- [60] R. Fletcher and S. Leyffer. Nonlinear programming without a penalty function. *Math. Program.*, 91(2, Ser. A) :239–269, 2002. [8](#), [9](#)
- [61] A. Forsgren and P. E. Gill. Primal-dual interior methods for nonconvex nonlinear programming. *SIAM J. Optim.*, 8(4) :1132–1152 (electronic), 1998. [9](#), [30](#), [59](#)
- [62] A. Forsgren, P. E. Gill, and M. H. Wright. Interior methods for nonlinear optimization. *SIAM Rev.*, 44(4) :525–597 (electronic) (2003), 2002. [7](#), [14](#)
- [63] R. Fourer, D. M. Gay, and B. W. Kernighan. *AMPL : A Modeling Language for Mathematical Programming*. Brooks/Cole, 2 edition, 2002. [99](#)
- [64] M. P. Friedlander and D. Orban. A primal-dual regularized interior-point method for convex quadratic programs. *Math. Program. Comput.*, 4(1) :71–107, 2012. [59](#), [101](#)
- [65] K. R. Frisch. The logarithmic potential method of convex programming. Memorandum, University Institute of Economics, Oslo, May 1955. [5](#), [6](#)
- [66] D. M. Gay, M. L. Overton, and M. A. H. Wright. A primal-dual interior method for nonconvex nonlinear programming. In *Advances in nonlinear programming (Beijing, 1996)*, volume 14 of *Appl. Optim.*, pages 31–56. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998. [8](#), [83](#)
- [67] E. M. Gertz and P. E. Gill. A primal-dual trust region algorithm for nonlinear optimization. *Math. Program.*, 100(1, Ser. B) :49–94, 2004. [8](#)
- [68] P. E. Gill, W. Murray, and M. A. Saunders. SNOPT : an SQP algorithm for large-scale constrained optimization. *SIAM Rev.*, 47(1) :99–131 (electronic), 2005. [9](#)
- [69] P. E. Gill, W. Murray, M. A. Saunders, and M. H. Wright. *Some theoretical properties of an augmented Lagrangian merit function*. Technical report (Stanford University. Systems Optimization Laboratory). Stanford University, Dept. of Operations Research, Systems Optimization Laboratory, 1986. [4](#)
- [70] P. E. Gill and D. P. Robinson. A primal-dual augmented Lagrangian. *Comput. Optim. Appl.*, 51(1) :1–25, 2012. [4](#), [8](#), [9](#), [30](#)
- [71] P. E. Gill and D. P. Robinson. A globally convergent stabilized SQP method. *SIAM J. Optim.*, 23(4) :1983–2010, 2013. [4](#), [8](#), [9](#), [30](#), [59](#), [64](#)
- [72] T. Glad and E. Polak. A multiplier method with automatic limitation of penalty growth. *Math. Programming*, 17(2) :140–155, 1979. [3](#)
- [73] D. Goldfarb, R. Polyak, K. Scheinberg, and I. Yuzefovich. A modified barrier-augmented Lagrangian method for constrained minimization. *Comput. Optim. Appl.*, 14(1) :55–74, 1999. [4](#), [9](#)
- [74] N. I. M. Gould. On the accurate determination of search directions for simple differentiable penalty functions. *IMA J. Numer. Anal.*, 6(3) :357–372, 1986. [2](#)
- [75] N. I. M. Gould, D. Orban, A. Sartenaer, and P. L. Toint. Superlinear convergence of primal-dual interior point algorithms for nonlinear programming. *SIAM J. Optim.*, 11(4) :974–1002, 2001. [8](#)
- [76] N. I. M. Gould, D. Orban, A. Sartenaer, and P. L. Toint. Componentwise fast convergence in the solution of full-rank systems of nonlinear equations. *Math. Program.*, 92(3, Ser. B) :481–508, 2002. ISMP 2000, Part 2 (Atlanta, GA). [8](#)

- 
- [77] N. I. M. Gould, D. Orban, and P. L. Toint. CUTER and SifDec : A constrained and unconstrained testing environment, revisited. Technical report, CERFACS, Toulouse, France, 2001. [20](#), [60](#), [103](#)
  - [78] N. I. M. Gould, D. Orban, and P. L. Toint. GALAHAD, a library of thread-safe Fortran 90 packages for large-scale nonlinear optimization. *ACM Trans. Math. Software*, 29(4) :353–372, 2003. [9](#)
  - [79] N. I. M. Gould, D. Orban, and P. L. Toint. Galahad, a library of thread-safe fortran 90 packages for large-scale nonlinear optimization. *ACM Trans. Math. Softw.*, 29(4) :353–372, Dec. 2003. [91](#)
  - [80] N. I. M. Gould, D. Orban, and P. L. Toint. Numerical methods for large-scale nonlinear optimization. *Acta Numer.*, 14 :299–361, 2005. [7](#), [8](#)
  - [81] N. I. M. Gould, D. Orban, and P. L. Toint. Cutest : a constrained and unconstrained testing environment with safe threads. Technical Report RAL-TR-2013-005, Rutherford Appleton Laboratory, Chilton, Oxfordshire, England, 2013. [59](#), [99](#), [103](#)
  - [82] M. R. Hestenes. Multiplier and gradient methods. *J. Optimization Theory Appl.*, 4 :303–320, 1969. [3](#)
  - [83] W. Hock and K. Schittkowski. *Test examples for nonlinear programming codes*, volume 187 of *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1981. [59](#), [87](#), [103](#)
  - [84] N. Karmarkar. A new polynomial-time algorithm for linear programming. *Combinatorica*, 4(4) :373–395, 1984. [7](#)
  - [85] M. Kočvara and M. Stingl. Pennon : a code for convex nonlinear and semidefinite programming. *Optim. Methods Softw.*, 18(3) :317–333, 2003. [5](#)
  - [86] M. Kojima, S. Mizuno, and A. Yoshise. A primal-dual interior point algorithm for linear programming. In *Progress in mathematical programming (Pacific Grove, CA, 1987)*, pages 29–47. Springer, New York, 1989. [7](#)
  - [87] B. W. Kort and D. P. Bertsekas. Combined primal-dual and penalty methods for convex programming. *SIAM J. Control Optimization*, 14(2) :268–294, 1976. [4](#)
  - [88] B. W. Kort and D. P. Bertsekas. A new penalty function method for constrained minimization. In *Decision and Control, 1972 and 11th Symposium on Adaptive Processes. Proceedings of the 1972 IEEE Conference on*, volume 11, pages 162–166, Dec. [4](#)
  - [89] S. Leyffer. Macmpec test suite. <http://www-unix.mcs.anl.gov/leyffer/macmpec>. [60](#), [96](#), [103](#)
  - [90] X. Liu and J. Sun. A robust primal-dual interior-point algorithm for nonlinear programs. *SIAM J. Optim.*, 14(4) :1163–1186 (electronic), 2004. [8](#)
  - [91] X. W. Liu and J. Sun. Global convergence analysis of line search interior-point methods for nonlinear programming without regularity assumptions. *J. Optim. Theory Appl.*, 125(3) :609–628, 2005. [8](#)
  - [92] F. A. Lootsma. Hessian matrices of penalty functions for solving constrained-optimization problems. *Philips Res. Rep.*, 24 :322–330, 1969. [2](#), [6](#)



- [93] H. J. Martinez, Z. Parada, and R. A. Tapia. On the characterization of  $Q$ -superlinear convergence of quasi-Newton interior-point methods for nonlinear programming. *Bol. Soc. Mat. Mexicana* (3), 1(2) :137–148, 1995. [8](#)
- [94] J. M. Moguerza and F. J. Prieto. An augmented Lagrangian interior-point method using directions of negative curvature. *Math. Program.*, 95(3, Ser. A) :573–616, 2003. [8](#)
- [95] W. Murray. Analytical expressions for the eigenvalues and eigenvectors of the Hessian matrices of barrier and penalty functions. *J. Optimization Theory Appl.*, 7 :189–196, 1971. [2](#), [6](#)
- [96] B. A. Murtagh and M. A. Saunders. Minos 5.5 user’s guide. report sol 83-20r. *SIAM J. Optim.*, 18(4) :1286–1309, 2007. [5](#)
- [97] S. G. Nash, R. Polyak, and A. Sofer. A numerical comparison of barrier and modified barrier methods for large-scale bound-constrained optimization. In *Large scale optimization (Gainesville, FL, 1993)*, pages 319–338. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1994. [7](#), [100](#)
- [98] A. S. Nemirovski and M. J. Todd. Interior-point methods for optimization. *Acta Numer.*, 17 :191–234, 2008. [7](#)
- [99] J. Nocedal and S. J. Wright. *Numerical optimization*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer, New York, second edition, 2006. [3](#), [9](#), [56](#)
- [100] E. Polak and A. L. Tits. A globally convergent, implementable multiplier method with automatic penalty limitation. *Appl. Math. Optim.*, 6(4) :335–360, 1980. [4](#)
- [101] R. Polyak. Modified barrier functions (theory and methods). *Math. Programming*, 54(2, Ser. A) :177–222, 1992. [4](#), [6](#)
- [102] R. A. Polyak. On the local quadratic convergence of the primal-dual augmented Lagrangian method. *Optim. Methods Softw.*, 24(3) :369–379, 2009. [4](#)
- [103] M. J. D. Powell. A method for nonlinear constraints in minimization problems. In *Optimization (Sympos., Univ. Keele, Keele, 1968)*, pages 283–298. Academic Press, London, 1969. [3](#)
- [104] D. P. Robinson. *Primal-dual methods for nonlinear optimization*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2007. Thesis (Ph.D.)—University of California, San Diego. [30](#)
- [105] R. T. Rockafellar. The multiplier method of Hestenes and Powell applied to convex programming. *J. Optimization Theory Appl.*, 12 :555–562, 1973. [3](#), [4](#)
- [106] R. T. Rockafellar. New applications of duality in nonlinear programming. In *Proceedings of the Fourth Conference on Probability Theory (Braşov, 1971)*, pages 73–81. Editura Acad. R.S.R., Bucharest, 1973. [3](#)
- [107] R. T. Rockafellar. Augmented Lagrange multiplier functions and duality in non-convex programming. *SIAM J. Control*, 12 :268–285, 1974. Collection of articles dedicated to the memory of Lucien W. Neustadt. [4](#)
- [108] R. T. Rockafellar. Augmented Lagrangians and applications of the proximal point algorithm in convex programming. *Math. Oper. Res.*, 1(2) :97–116, 1976. [4](#)

- 
- [109] K. Schittkowski. The nonlinear programming method of Wilson, Han, and Powell with an augmented Lagrangian type line search function. I. Convergence analysis. *Numer. Math.*, 38(1) :83–114, 1981. [4](#)
- [110] K. Schittkowski. On the convergence of a sequential quadratic programming method with an augmented Lagrangian line search function. *Math. Operationsforsch. Statist. Ser. Optim.*, 14(2) :197–216, 1983. [4](#)
- [111] K. Schittkowski, editor. *More Test Examples for Nonlinear Programming Codes*. Springer-Verlag New York, Inc., New York, NY, USA, 1987. [87](#), [103](#)
- [112] R. A. Tapia. Diagonalized multiplier methods and quasi-Newton methods for constrained optimization. *J. Optimization Theory Appl.*, 22(2) :135–194, 1977. [4](#)
- [113] A. L. Tits, A. Wächter, S. Bakhtiari, T. J. Urban, and C. T. Lawrence. A primal-dual interior-point method for nonlinear programming with strong global and local convergence properties. *SIAM J. Optim.*, 14(1) :173–199 (electronic), 2003. [8](#), [9](#), [59](#)
- [114] P. Tseng. Convergent infeasible interior-point trust-region methods for constrained minimization. *SIAM J. Optim.*, 13(2) :432–469 (electronic), 2002. [8](#)
- [115] P. Tseng and D. P. Bertsekas. On the convergence of the exponential multiplier method for convex programming. *Math. Programming*, 60(1, Ser. A) :1–19, 1993. [4](#)
- [116] M. Ulbrich, S. Ulbrich, and L. N. Vicente. A globally convergent primal-dual interior-point filter method for nonlinear programming. *Math. Program.*, 100(2, Ser. A) :379–410, 2004. [8](#), [64](#)
- [117] R. J. Vanderbei and D. F. Shanno. An interior-point algorithm for nonconvex nonlinear programming. *Comput. Optim. Appl.*, 13(1-3) :231–252, 1999. Computational optimization—a tribute to Olvi Mangasarian, Part II. [8](#), [9](#), [54](#)
- [118] A. Wächter. *An Interior Point Algorithm for Large-Scale Nonlinear Optimization with Applications in Process Engineering*. PhD thesis, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA, USA, 2002. [45](#)
- [119] A. Wächter and L. T. Biegler. Failure of global convergence for a class of interior point methods for nonlinear programming. *Math. Program.*, 88(3, Ser. A) :565–574, 2000. [8](#), [86](#)
- [120] A. Wächter and L. T. Biegler. Line search filter methods for nonlinear programming : local convergence. *SIAM J. Optim.*, 16(1) :32–48 (electronic), 2005. [64](#)
- [121] A. Wächter and L. T. Biegler. On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming. *Math. Program.*, 106(1, Ser. A) :25–57, 2006. [8](#), [9](#), [45](#), [54](#), [59](#), [86](#), [89](#)
- [122] R. A. Waltz, J. L. Morales, J. Nocedal, and D. Orban. An interior algorithm for nonlinear optimization that combines line search and trust region steps. *Math. Program.*, 107(3, Ser. A) :391–408, 2006. [8](#)
- [123] C. Wang and D. Li. Unified theory of augmented Lagrangian methods for constrained global optimization. *J. Global Optim.*, 44(3) :433–458, 2009. [4](#)
- [124] R. B. Wilson. *A Simplicial Algorithm for Concave Programming*. PhD thesis, Graduate School of Business Administration, Harvard University, 1963. [9](#)

- [125] M. A. H. Wright. *Numerical methods for nonlinearly constrained optimization*. STAN-CS. Dept. of Computer Science, 1976. [4](#)
- [126] M. A. H. Wright. Interior methods for constrained optimization. *Acta Numer.*, 14 :341–407, 1992. [7](#)
- [127] S. J. Wright. An algorithm for degenerate nonlinear programming with rapid local convergence. *SIAM J. Optim.*, 15(3) :673–696 (electronic), 2005. [95](#)
- [128] H. Yamashita. A globally convergent primal-dual interior point method for constrained optimization. *Optim. Methods Softw.*, 10(2) :443–469, 1998. Dedicated to Professor Masao Iri on the occasion of his 65th birthday. [8](#)
- [129] H. Yamashita and H. Yabe. Superlinear and quadratic convergence of some primal-dual interior point methods for constrained optimization. *Math. Programming*, 75(3, Ser. A) :377–397, 1996. [8](#)
- [130] H. Yamashita and H. Yabe. An interior point method with a primal-dual quadratic barrier penalty function for nonlinear optimization. *SIAM J. Optim.*, 14(2) :479–499 (electronic), 2003. [8](#), [9](#), [59](#), [64](#)
- [131] H. Yamashita and H. Yabe. Local and superlinear convergence of a primal-dual interior point method for nonlinear semidefinite programming. *Math. Program.*, 132(1-2, Ser. A) :1–30, 2012. [101](#)
- [132] H. Yamashita, H. Yabe, and K. Harada. A primal-dual interior point method for nonlinear semidefinite programming. *Math. Program.*, 135(1-2, Ser. A) :89–121, 2012. [101](#)
- [133] H. Yamashita, H. Yabe, and T. Tanabe. A globally and superlinearly convergent primal-dual interior point trust region method for large scale constrained optimization. *Math. Program.*, 102(1, Ser. A) :111–151, 2005. [8](#), [54](#)





## Méthodes primales-duales régularisées pour l'optimisation non linéaire avec contraintes

**Résumé :** Cette thèse s'inscrit dans le cadre de la conception, l'analyse et la mise en œuvre d'algorithmes efficaces et fiables pour la résolution de problèmes d'optimisation non linéaire avec contraintes. Nous présentons trois nouveaux algorithmes fortement primaux-duaux pour résoudre ces problèmes. La première caractéristique de ces algorithmes est que le contrôle des itérés s'effectue dans l'espace primal-dual tout au long du processus de la minimisation, d'où l'appellation "fortement primaux-duaux". En particulier, la globalisation est effectuée par une méthode de recherche linéaire qui utilise une fonction de mérite primale-duale. La deuxième caractéristique est l'introduction d'une régularisation naturelle du système linéaire qui est résolu à chaque itération pour calculer une direction de descente. Ceci permet à nos algorithmes de bien se comporter pour résoudre les problèmes dégénérés pour lesquels la jacobienne des contraintes n'est pas de plein rang. La troisième caractéristique est que le paramètre de pénalisation est autorisé à augmenter au cours des itérations internes, alors qu'il est généralement maintenu constant. Cela permet de réduire le nombre d'itérations internes. Une étude théorique détaillée incluant l'analyse de convergence globale des itérations internes et externes, ainsi qu'une analyse asymptotique a été présentée pour chaque algorithme. En particulier, nous montrons qu'ils jouissent d'un taux de convergence rapide, superlinéaire ou quadratique. Ces algorithmes sont implémentés dans un nouveau solveur d'optimisation non linéaire qui est appelé SPDOPT. Les bonnes performances de ce solveur ont été montrées en effectuant des comparaisons avec les codes de références IPOPT, ALGENCAN et LANCELOT sur une large collection de problèmes.

**Mots-clés :** Optimisation numérique, optimisation avec contraintes, programmation non linéaire, théorie de convergence, méthode primale-duale, régularisation.

## Regularized primal-dual methods for nonlinearly constrained optimization

**Abstract :** This thesis focuses on the design, analysis, and implementation of efficient and reliable algorithms for solving nonlinearly constrained optimization problems. We present three new strongly primal-dual algorithms to solve such problems. The first feature of these algorithms is that the control of the iterates is done in both primal and dual spaces during the whole minimization process, hence the name "strongly primal-dual". In particular, the globalization is performed by applying a backtracking line search algorithm based on a primal-dual merit function. The second feature is the introduction of a natural regularization of the linear system solved at each iteration to compute a descent direction. This allows our algorithms to perform well when solving degenerate problems for which the Jacobian of constraints is rank deficient. The third feature is that the penalty parameter is allowed to increase along the inner iterations, while it is usually kept constant. This allows to reduce the number of inner iterations. A detailed theoretical study including the global convergence analysis of both inner and outer iterations, as well as an asymptotic convergence analysis is presented for each algorithm. In particular, we prove that these methods have a high rate of convergence : superlinear or quadratic. These algorithms have been implemented in a new solver for nonlinear optimization which is called SPDOPT. The good practical performances of this solver have been demonstrated by comparing it to the reference codes IPOPT, ALGENCAN and LANCELOT on a large collection of test problems.

**Keywords :** Numerical optimization, constrained optimization, nonlinear programming, convergence theory, primal-dual methods, regularization.